Apostila de Preparação para a 2ª Fase OBMEP 2018

Material para Professores

Caro amigo (a) Professor (a),

Este material contém questões da 2ª Fase da OBMEP das edições anteriores que mostrará a nossos alunos que é possível ter um bom rendimento nesta fase também.

As questões aqui selecionadas são comuns para os alunos do Nível 1 (6º e 7º anos) e alunos do Nível 2 (8º e 9º anos) de 2005 a 2017.

Todas as questões são acompanhadas de soluções sugeridas pela OBMEP, mas nada impede que você encontre uma solução diferente e criativa com seu aluno.

Lembrar que essa apostila é uma pequena amostragem e não a prova que nossos alunos farão no dia 15 de Setembro e que sirva de motivação para estudarem e pesquisarem outras questões da 2ª Fase da OBMEP consultando o site da OBMEP (www.obmep.org.br/provas.htm) que possui as "Provas e Soluções" de todas as edições anteriores.

Obrigado por termos mais uma vez "100% das escolas de São Gonçalo participando da OBMEP" e nosso grande desafio no momento é "Uma Medalha em Cada Escola" e, com isso, o ensino de Matemática passa a ter um novo olhar em toda a Sociedade.

Bons estudos!

Professor Jean e Professor Júlio Vidal

Clube Loucos por Matemática/De Olho no Futuro

Q1 – (2005) A caminhonete do Tio Barnabé pode carregar até 2000 quilos. Ele aceita um serviço para transportar uma carga de
150 sacas de arroz de 60 quilos cada e 100 sacas de milho de 25 quilos cada.
A) Você acha possível que o Tio Barnabé faça esse serviço em cinco viagens? Por quê?
B) Descreva uma maneira de fazer o serviço em seis viagens.

Q2 – (2005) Numa aula de Matemática, a professora inicia uma brincadeira, escrevendo no quadro-negro um número. Para continuar a brincadeira, os alunos devem escrever outro número, seguindo as regras abaixo:

Regras da Brincadeira	
Números com 1 algarismo	**Números com mais de 1 algarismo**
multiplicar por 2	*multiplicar por 2* OU *apagar o algarismo das unidades*

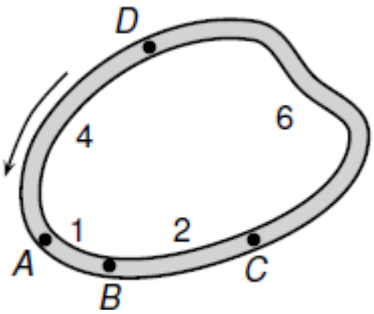
(1) Se o número escrito só tiver um algarismo, ele deve ser multiplicado por 2.
(2) Se o número escrito tiver mais de um algarismo, os alunos podem escolher entre apagar o algarismo das unidades ou multiplicar esse número por 2.
Depois que os alunos escrevem um novo número a brincadeira continua com este número, sempre com as mesmas regras.
Veja a seguir dois exemplos desta brincadeira, um começando com 203 e o outro com 4197:

$$203 \xrightarrow{\text{dobra}} 406 \xrightarrow{\text{apaga}} 40 \xrightarrow{\text{apaga}} 4\ldots$$

$$4197 \xrightarrow{\text{apaga}} 419 \xrightarrow{\text{dobra}} 838 \xrightarrow{\text{apaga}} 83\ldots$$

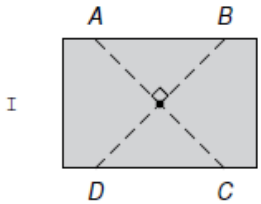
A) Comece a brincadeira com o número 45 e mostre uma maneira de prosseguir até chegar ao número 1.
B) Comece agora a brincadeira com o número 345 e mostre uma maneira de prosseguir até chegar ao número 1.
C) Explique como chegar ao número 1 começando a brincadeira com qualquer número natural diferente de zero.

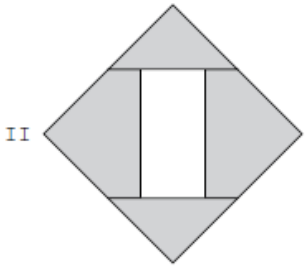
Q3 – (2006) A figura representa o traçado de uma pista de corrida. Os postos A, B, C e D são usados para partidas e chegadas de todas as corridas. As distâncias entre postos vizinhos, em quilômetros, estão indicadas na figura e as corridas são realizadas no sentido indicado pela flecha.



Por exemplo, uma corrida de 17 km pode ser realizada com partida em D e chegada em A.
(a) Quais são os postos de partida e chegada de uma corrida de 14 quilômetros?
(b) E para uma corrida de 100 quilômetros, quais são esses postos?
(c) Mostre que é possível realizar corridas com extensão igual a qualquer número inteiro de quilômetros.

Q4 – (2006) Uma folha retangular de 20 cm por 30 cm foi cortada ao longo das linhas tracejadas AC e BD em quatro pedaços: dois triângulos iguais e dois polígonos iguais de cinco lados cada um, como na figura I.
Os segmentos AC e BD têm o mesmo comprimento e se encontram no centro do retângulo formando ângulos retos.





(a) Qual é o comprimento do segmento AB?
(b) Qual é a área de um pedaço triangular? E de um pedaço de cinco lados?
(c) Com os quatro pedaços podemos montar um quadrado com um buraco retangular, como na figura II. Qual é a área do buraco?

Q5 – (2007) Um antigo método para codificar palavras consiste em escolher um número de 1 a 26, chamado *chave do código*, e girar o disco interno do aparelho ilustrado na figura até que essa chave corresponda à letra **A**. Depois disso, as letras da palavra são substituídas pelos números correspondentes, separados por tracinhos. Por exemplo, na figura ao lado a chave é 5 e a palavra PAI é codificada como 20-5-13.
(a) Usando a chave indicada na figura, descubra qual palavra foi codificada como 23-25-7-25-22-13.
(b) Codifique OBMEP usando a chave 20.
(c) Chicó codificou uma palavra de 4 letras com a chave 20, mas esqueceu-se de colocar os tracinhos e escreveu 2620138. Ajude o Chicó colocando os tracinhos que ele esqueceu e depois escreva a palavra que ele codificou.
(d) Em uma outra chave, a soma dos números que representam as letras A, B e C é 52. Qual é essa chave?

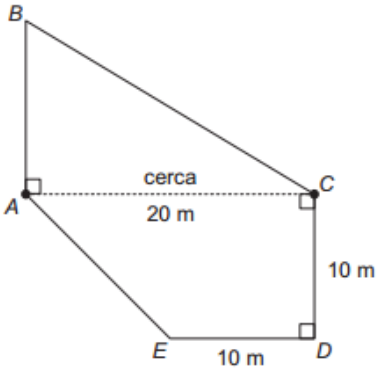
Q6 – (2007) Os times *A*, *B*, *C*, *D* e *E* disputaram, entre si, um torneio de futebol com as seguintes regras:
• o vencedor de uma partida ganha 3 pontos e o perdedor não ganha nada;
• em caso de empate cada um dos times ganha 1 ponto;
• cada time joga exatamente uma vez com cada um dos outros.

O campeão do torneio foi o time *A*, seguido na classificação por *B*, *C*, *D* e *E*, nessa ordem. Além disso:
• o time *A* não empatou nenhuma partida;
• o time *B* não perdeu nenhuma partida;
• todos os times terminaram o torneio com números diferentes de pontos.

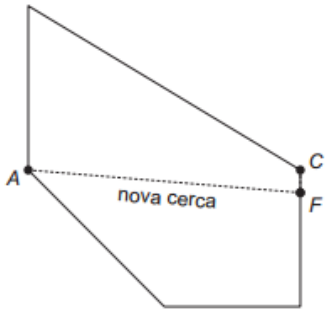
(a) O time *A* ganhou, perdeu ou empatou sua partida contra o time *B*? Por quê?
(b) Com quantos pontos o time *A* terminou o torneio? Por quê?
(c) Explique porque o time *B* obteve um número par de pontos nesse torneio.
(d) Na tabela, cada coluna representa uma partida. Sabendo que ocorreram exatamente 5 empates nesse torneio, desenhe, em cada coluna da tabela, um círculo em volta do nome do time ganhador ou em volta do ×, em caso de empate.

A × *B*	*A* × *C*	*A* × *D*	*A* × *E*	*B* × *C*	*B* × *D*	*B* × *E*	*C* × *D*	*C* × *E*	*D* × *E*

Q7 - (2008) A figura ao lado representa o terreno de Dona Idalina. Esse terreno é dividido em duas partes por uma cerca, representada pelo segmento AC. A parte triangular ABC tem área igual a 120 m^2.

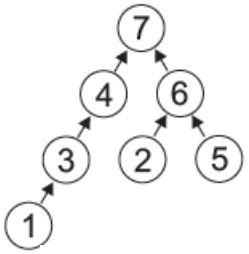


(a) Qual é a área total do terreno?

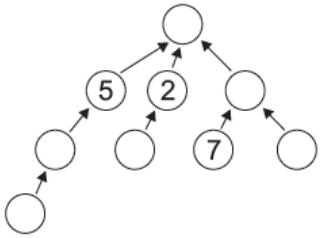


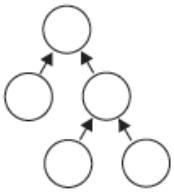
(b) Dona Idalina quer fazer uma nova cerca, representada pelo segmento AF na figura, de modo a dividir o terreno em duas partes de mesma área. Qual deve ser a distância CF?

Q8 – (2008) Os círculos da figura abaixo foram preenchidos com os números de 1 a 7, de modo que todas as flechas apontam de um número menor para um maior. Neste caso, dizemos que a figura foi *bem preenchida*.

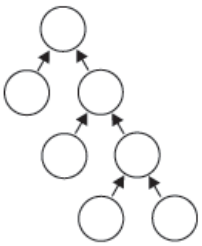


(a) Complete a figura abaixo com os números de 1 a 9 de modo que ela fique bem preenchida.





(b) De quantas maneiras a figura ao lado pode ser bem preenchida com os números de 1 a 5?



(c) De quantas maneiras a figura ao lado pode ser bem preenchida com os números de 1 a 7?

Q9 - (2009) Ana quer colorir as bolinhas das figuras 1, 2 e 3 de azul (A), preto (P) ou vermelho (V) de modo que bolinhas ligadas por um segmento tenham cores diferentes.

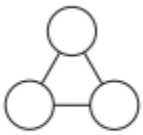


Figura 1

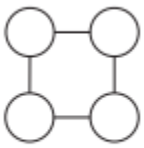


Figura 2

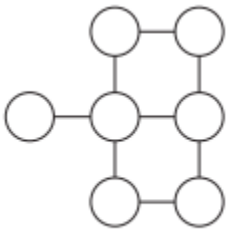


Figura 3

Veja a seguir duas maneiras diferentes de colorir a figura 1 e duas maneiras diferentes de colorir a figura 2:

(a) De quantas maneiras diferentes Ana pode colorir a figura 1?
(b) De quantas maneiras diferentes Ana pode colorir a figura 2?
(c) De quantas maneiras diferentes Ana pode colorir a figura 3?

Q10 – (2009) No jogo do *Troca-Cor* usa-se um tabuleiro com duas linhas e com quantas colunas quisermos, cujas casas podem mudar da cor branca para cinza e vice-versa. As casas da 1a linha são numeradas com os números ímpares e as da 2a linha com os números pares. Em cada jogada aperta-se uma casa e, então, essa casa e as casas vizinhas mudam de cor. Uma *partida completa* começa com todas as casas brancas e termina quando todas ficam cinzas. Veja dois exemplos de partidas completas (os números acima das flechas indicam a casa apertada em cada jogada):

Casas vizinhas são casas que têm um lado comum.

Tabuleiro	Partida completa	Jogadas
2×3	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline 1&3&5\\\hline 2&4&6\\\hline\end{array} \xrightarrow{1} \begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline 1&3&5\\\hline 2&4&6\\\hline\end{array} \xrightarrow{6} \begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline 1&3&5\\\hline 2&4&6\\\hline\end{array}$	1 e 6
2×2	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 1&3\\\hline 2&4\\\hline\end{array} \xrightarrow{1} \begin{array}{\|c\|c\|}\hline 1&3\\\hline 2&4\\\hline\end{array} \xrightarrow{2} \begin{array}{\|c\|c\|}\hline 1&3\\\hline 2&4\\\hline\end{array} \xrightarrow{4} \begin{array}{\|c\|c\|}\hline 1&3\\\hline 2&4\\\hline\end{array} \xrightarrow{3} \begin{array}{\|c\|c\|}\hline 1&3\\\hline 2&4\\\hline\end{array}$	1, 2, 4 e 3

(a) Escreva as jogadas de uma partida completa nos tabuleiros ao lado.

Tabuleiro	Jogadas
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1&3&5&7&9\\\hline 2&4&6&8&10\\\hline\end{array}$	
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1&3&5&7\\\hline 2&4&6&8\\\hline\end{array}$	

(b) Explique como jogar uma partida completa num tabuleiro 2 X 100.

(c) Explique como jogar uma partida completa com exatamente 51 jogadas no tabuleiro 2 X 101.

(d) Explique por que não é possível jogar uma partida completa com menos que 51 jogadas no tabuleiro 2 X 101.

Q11 – (2010) Um "matemágico" faz mágicas com cartões verdes, amarelos, azuis e vermelhos, numerados de 1 a 13 para cada cor. Ele mistura os cartões e diz para uma criança: "Sem que eu veja, escolha um cartão, calcule o dobro do número desse cartão, some 3 e multiplique o resultado por 5. Depois:

- Some 1, se o cartão for verde;
- Some 2, se o cartão for amarelo;
- Some 3, se o cartão for azul;

- Some 4, se o cartão for vermelho.

Diga-me o resultado final e eu lhe direi a cor e o número do cartão que você escolheu."

a) Joãozinho escolheu o cartão vermelho com o número 3. Qual é o número que ele deve dizer ao matemágico?

b) Mariazinha disse "Setenta e seis" para o matemágico. Qual é o número e a cor do cartão que ela escolheu?

c) Após escolher um cartão, Pedrinho disse "Setenta e um" e o matemágico respondeu "Você errou alguma conta". Explique como o matemágico pôde saber isso.

Q12 - (2010) Gabriel desenha quadrados divididos em nove casas e escreve os números naturais de 1 a 9, um em cada casa. Em seguida, ele calcula a soma dos números de cada linha e de cada coluna. A figura mostra um dos quadrados de Gabriel; observe que a soma dos números da terceira linha é 5 + 8 + 2 = 15 e a soma dos números da segunda coluna é 9 + 7 + 8 = 24. Nesse exemplo, as seis somas são 6, 12, 15, 15, 18 e 24.

6	9	3	18
4	7	1	12
5	8	2	15
15	24	6	

a) Gabriel preencheu um quadrado e fez apenas cinco somas: 9, 13, 14, 17 e 18. Qual é a soma que está faltando?

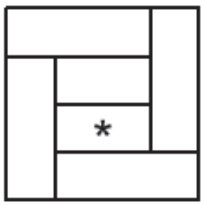
b) Explique por que não é possível que, em um quadrado do Gabriel, todas as somas sejam números pares.

c) Preencha o quadrado de modo que as somas sejam 7, 13, 14, 16, 18 e 22.

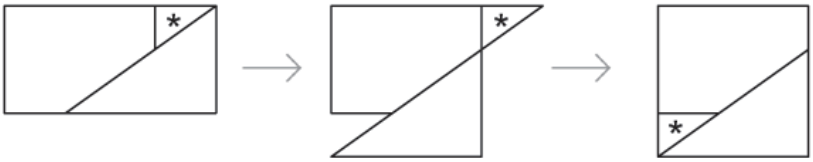
Q13 – (2011) Sara recortou três tiras retangulares diferentes de papel.

a) Ela recortou a primeira tira em três retângulos iguais, como na figura abaixo. Com esses retângulos, formou um quadrado de 36 cm^2 de área. Encontre as medidas dos lados dos retângulos que ela recortou.

b) Ela recortou a segunda tira em seis retângulos de mesma largura e com eles formou um quadrado de 36 cm^2 de área, como na figura. Encontre o perímetro e a área do retângulo indicado com *.



c) As medidas da terceira tira eram 4,5 cm e 2 cm. Sara recortou essa tira em três pedaços e com eles formou um quadrado, como na figura. Qual é a área do triângulo indicado com *?



Q14 – (2011) Começando com qualquer número natural não nulo é sempre possível formar uma sequência de números que termina em 1, seguindo repetidamente as instruções abaixo:

• se o número for ímpar, soma-se 1;

• se o número for par, divide-se por 2.

Por exemplo, começando com o número 21, forma-se a seguinte sequência:

$$21 \to 22 \to 11 \to 12 \to 6 \to 3 \to 4 \to 2 \to 1$$

Nessa sequência aparecem nove números; por isso, dizemos que ela tem *comprimento* 9. Além disso, como ela começa com um número ímpar, dizemos que ela é uma *sequência ímpar*.

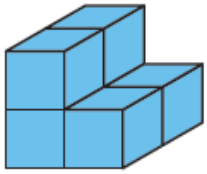
a) Escreva a sequência que começa com 37.

b) Existem três sequências de comprimento 5, sendo duas pares e uma ímpar. Escreva essas sequências.

c) Quantas são as sequências pares e quantas são as sequências ímpares de comprimento 6? E de comprimento 7?

d) Existem ao todo 377 sequências de comprimento 15, sendo 233 pares e 144 ímpares. Quantas são as sequências de comprimento 16? Dessas, quantas são pares? Não se esqueça de justificar sua resposta.

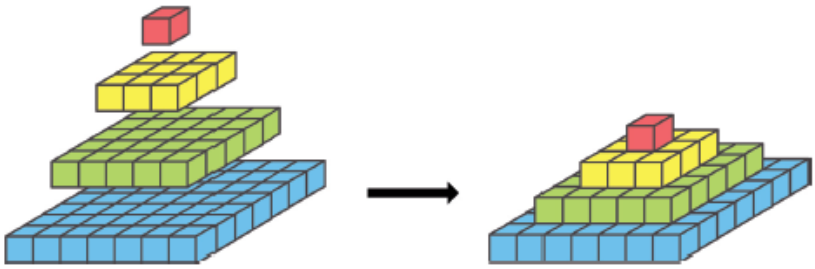
Q15 – (2012) Cláudia gosta de montar sólidos colando cubinhos de aresta 1 cm. Ela sempre usa um pingo de cola entre duas faces de cubinhos que ficam em contato; por exemplo, para montar o sólido ao lado ela usou 7 pingos de cola.



a) Quantos pingos ela vai usar para montar um cubo de aresta 2 cm?

b) Quantos pingos ela vai usar para montar um cubo de aresta 3 cm?

c) Cláudia montou o sólido ao lado, com quatro camadas de cubinhos. Quantos pingos de cola ela usou?



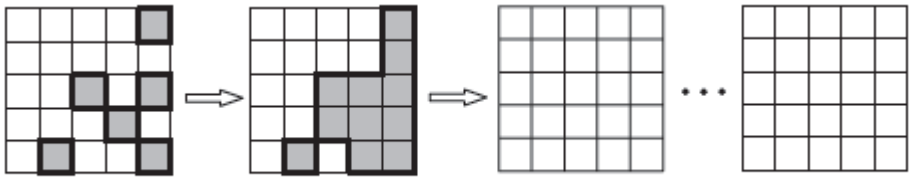
Q16 – (2012) Uma contaminação em um tabuleiro 5 × 5 , formado por quadrados de 1 cm de lado, propaga-se em estágios de acordo com as seguintes regras:

• quadrados contaminados, indicados em cinza, permanecem contaminados no estágio seguinte;

• um quadrado não contaminado, indicado em branco, torna-se contaminado no estágio seguinte quando tem pelo menos dois lados comuns com quadrados contaminados; caso contrário, permanece não contaminado;

• a contaminação acaba quando não é possível contaminar novos quadrados.

a) Complete a figura abaixo, desenhando o terceiro e o último estágios da contaminação nos respectivos tabuleiros.

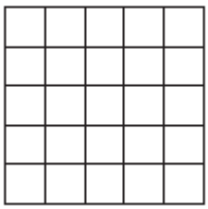


1º estágio 2º estágio 3º estágio último estágio

O *perímetro de contaminação* de um estágio é a medida do contorno da área contaminada. Por exemplo, os perímetros de contaminação do primeiro e do segundo estágios da contaminação ilustrada são 24 cm e 20 cm, respectivamente, como mostram as linhas em destaque na figura do item **a**.

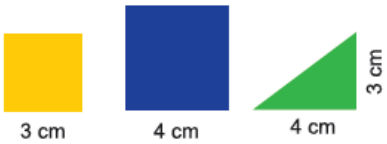
b) Escreva os perímetros de contaminação do terceiro e do último estágios da contaminação do item **a**.

c) Desenhe um estágio com apenas 5 quadrados contaminados tal que, ao final da contaminação, todo o tabuleiro fique contaminado.



d) Explique por que o perímetro de contaminação nunca aumenta de um estágio para o seguinte.

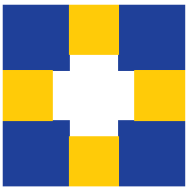
e) Explique por que não é possível contaminar todo o tabuleiro a partir de um estágio com menos de 5 quadrados contaminados.



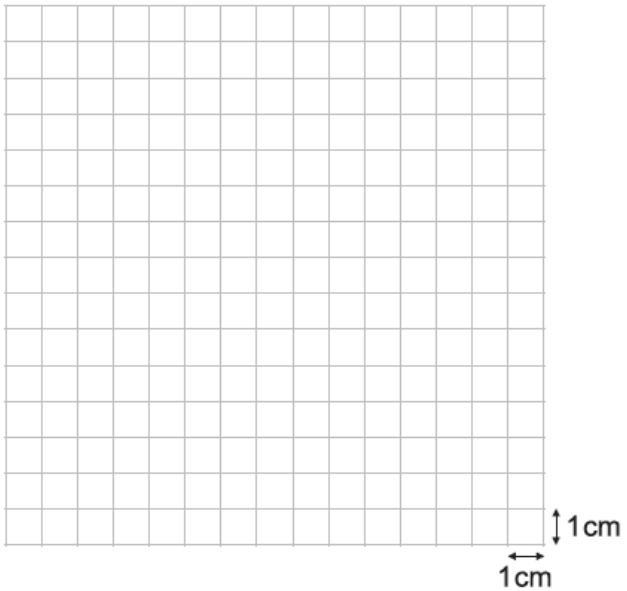
Q17 – (2013) Dafne tem muitas peças de plástico: quadrados amarelos de lado 3 cm, quadrados azuis de lado 4 cm e triângulos retângulos verdes cujos lados menores medem 3 cm e 4 cm, como mostrado à esquerda. Com estas peças e sem sobreposição, ela forma figuras como, por exemplo, o hexágono à direita.

a) Qual é a área do hexágono que Dafne formou?

b) Usando somente peças quadradas, Dafne formou a figura ao lado, com um buraco em seu interior. Qual é a área do buraco?



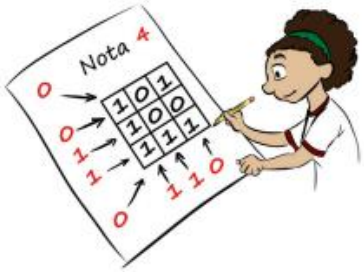
c) Mostre como Dafne pode preencher, sem deixar buracos, um quadrado de lado 15 cm com suas peças, sendo apenas uma delas um quadrado de lado 3 cm.



d) Explique por que Dafne não pode preencher um quadrado de lado 15 cm sem usar pelo menos um quadrado de lado 3 cm.

Q18 – (2013) Helena brinca com tabuleiros 3 × 3 , preenchidos com os algarismos 0 ou 1, da seguinte maneira:

• ela atribui o número 0 a cada linha, coluna ou diagonal cuja soma de seus algarismos seja par e o número 1 a cada linha, coluna ou diagonal para a qual essa soma seja ímpar; • em seguida, ela calcula a *nota* do tabuleiro, que é a soma dos números que ela atribuiu. Por exemplo, a nota do tabuleiro na ilustração é 0 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 = 4.



a) Qual é a nota do tabuleiro abaixo?

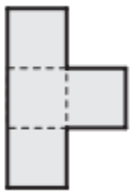
0	0	1
1	1	1
0	0	0

b) Preencha os tabuleiros abaixo de quatro maneiras diferentes e de modo que todos tenham nota 8.

c) Explique por que, quando se troca o número de um dos cantos de um tabuleiro de nota ímpar, sua nota torna-se par.

d) De quantas maneiras diferentes um tabuleiro pode ser preenchido de modo que sua nota seja ímpar?

Q19 – (2014) Maria possui muitas peças, todas iguais, formadas por quatro quadradinhos, como mostra a figura ao lado. Sem sobrepor peças, ela tenta cobrir todas as casas de vários tabuleiros quadrados, fazendo coincidir os quadradinhos das peças com os do tabuleiro.



a) Desenhe na figura abaixo uma maneira de cobrir um tabuleiro 4x4 com essas peças.

b) Explique por que nenhum tabuleiro quadrado pode ser coberto com exatamente vinte peças.

c) Explique por que Maria nunca conseguirá cobrir um tabuleiro 10x10 com suas peças.

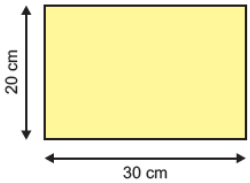
Q20 – (2014) Seis atletas, identificados pelas letras A, B, C, D, E e F, participaram de uma corrida de Quixajuba até Pirajuba. O atleta A saiu na frente, B saiu em seguida, e assim sucessivamente, até o atleta F, que saiu por último. O atleta D venceu a corrida e o atleta E terminou em último lugar.

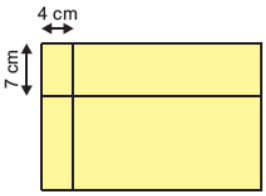
	A	B	C	D	E	F
A	-	2	4	2	1	2
B	2	-	0		3	1
C	4	0	-	4	1	3
D	3	2	5	-	1	3
E	1		1	1	-	0
F	3	2	4	3	1	-

A tabela mostra quantas vezes o atleta indicado na linha ultrapassou o atleta indicado na coluna.
Por exemplo, o número 5 na casa rosa indica que o atleta D ultrapassou cinco vezes o atleta C durante a corrida.

a) Quantas vezes o atleta F ultrapassou o atleta B?
b) Qual número deverá ser escrito na casa amarela?
c) Qual número deverá ser escrito na casa verde?
d) Em que ordem os atletas terminaram a corrida?

Q21 – (2015) Lucinha tem três folhas retangulares iguais, cujos lados medem 20 cm e 30 cm.

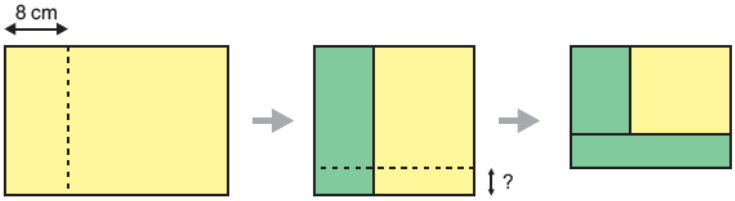




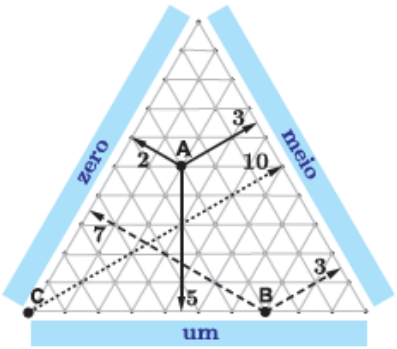
a) Lucinha fez dois traços retos na primeira folha, um a 4 cm da margem esquerda e outro a 7 cm da margem superior, dividindo-a em quatro retângulos. Um desses retângulos tem a maior área. Qual é o valor dessa área?

b) Ajude Lucinha a dividir a segunda folha em quadrados iguais, desenhando traços paralelos às margens, de modo que esses quadrados tenham a maior área possível.

c) Lucinha pegou a terceira folha, amarela na frente e verde no verso, e fez duas dobras: a primeira a 8 cm da margem esquerda e a segunda a uma certa distância da margem inferior, de forma que o perímetro da região não coberta da folha (contorno da região amarela da última figura) fosse de 54 cm. Qual é a distância da segunda dobra à margem inferior?

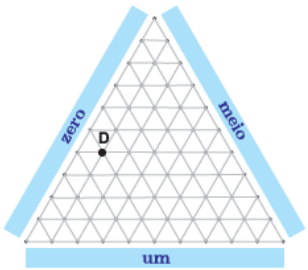


Q22 – (2015) A professora Isabel aplicou uma prova com 10 questões. Cada aluno recebeu nota 0,0 (zero), 0,5 (meio) ou 1,0 (um) em cada questão. O desempenho de cada aluno foi associado a um ponto de uma malha triangular, delimitada por um triângulo equilátero de altura 10, como na figura.

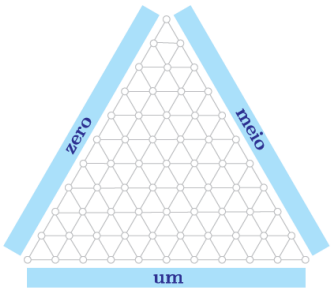


O ponto associado a um aluno é escolhido de forma que suas distâncias aos lados do triângulo sejam iguais às quantidades de questões em que o aluno obteve nota zero, meio ou um respectivamente. Por exemplo, o aluno A tirou zero em 2 questões, meio em 3 questões e um em 5 questões, obtendo 6,5 na prova. O aluno B obteve 1,5 na prova, pois tirou meio em 3 questões e zero em 7 questões. O aluno C obteve 5,0 na prova, pois tirou meio nas 10 questões.

a) Qual foi a nota obtida na prova pelo aluno D?

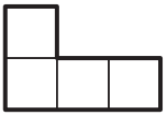


b) Quantos pontos da malha estão associados a alunos que tiram zero em exatamente quatro questões?

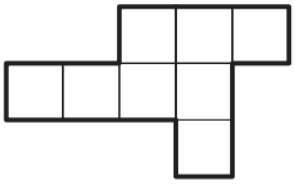


c) Assinale na malha abaixo os pontos associados a alunos que obtêm nota igual a 7,0 ou maior do que 7,0.

Q23 - (2016) A peça ilustrada abaixo é formada por quatro quadradinhos de 1 cm de lado. Observe que o perímetro desta peça, ou seja, a medida de seu contorno, é 10 cm.
Roberto forma figuras juntando duas dessas peças, sem sobreposição, e fazendo coincidir lados de quadradinhos.



a) Roberto formou a figura abaixo. Qual é o perímetro desta figura?



b) Ajude Roberto desenhando uma figura com perímetro igual a 12 cm no quadriculado da esquerda e outra com perímetro igual a 18 cm no quadriculado da direita.

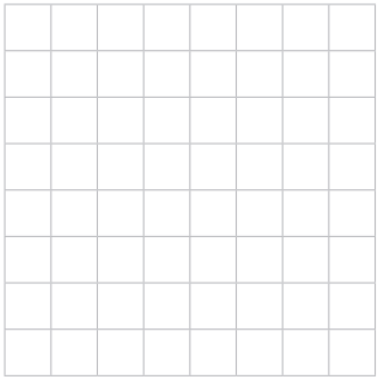


Figura com perímetro igual a 12 cm

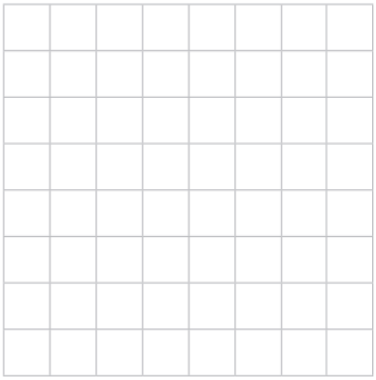
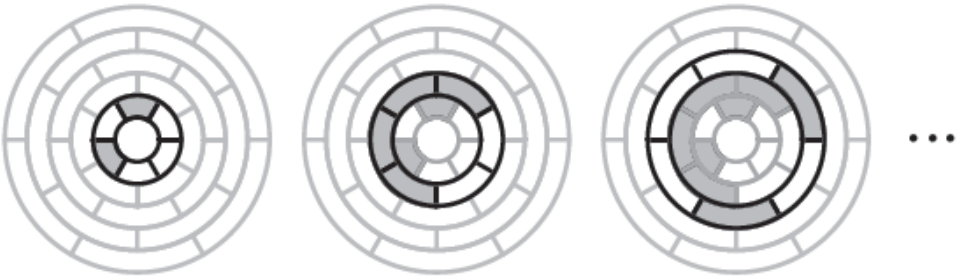


Figura com perímetro igual a 18 cm

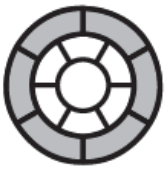
c) Explique por que Roberto nunca conseguirá formar uma figura com perímetro igual a 15 cm. (Lembre-se de que Roberto sempre faz coincidir lados de quadradinhos).

Q24 – (2016) Joãozinho pinta anéis encaixados, cada um deles dividido em seis partes iguais. No primeiro anel (o menor deles) Joãozinho pinta de cinza algumas partes, à sua escolha. Do segundo anel em diante, ele pinta de cinza somente as partes em contato com duas partes de cores diferentes do anel anterior. Observe um exemplo:



Pintura do 1.º anel Pintura do 2.º anel Pintura do 3.º anel

a) Joãozinho pintou o primeiro anel conforme a figura abaixo. Continue o trabalho de Joãozinho, pintando, na mesma figura, o segundo e o terceiro anéis.

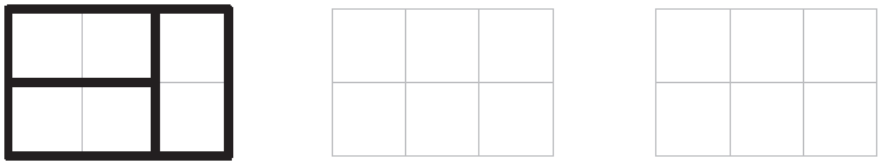


b) Na figura abaixo, pinte as partes do primeiro anel de modo que o segundo anel fique todo pintado de cinza.

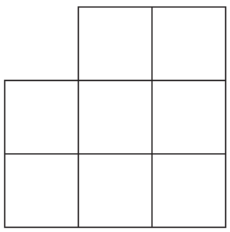
c) Explique por que, independentemente de como Joãozinho pintar o primeiro anel, os demais anéis sempre terão uma quantidade par de partes pintadas de cinza.

d) Explique por que, independentemente de como Joãozinho pintar o primeiro anel, nenhum anel a partir do terceiro será totalmente pintado de cinza.

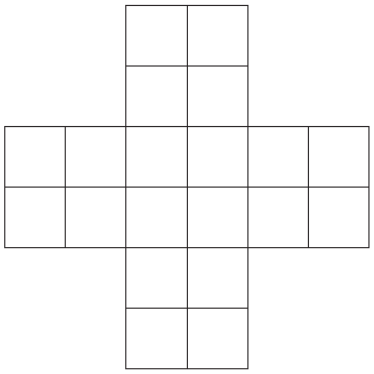
Q25 – (2017) Marcela brinca de cobrir todas as casas de tabuleiros quadriculados com peças retangulares e cada uma dessas peças cobre exatamente duas casas do tabuleiro.
a) A figura abaixo mostra uma maneira de cobrir um tabuleiro 2x3 utilizando três peças. Desenhe as outras duas maneiras de cobrir com três peças o mesmo tabuleiro.



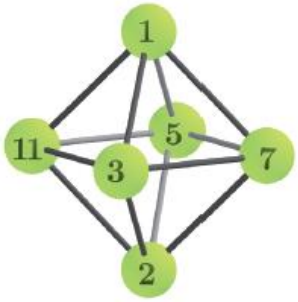
b) De quantas maneiras diferentes Marcela pode cobrir com quatro peças o tabuleiro abaixo?



c) De quantas maneiras diferentes Marcela pode cobrir com dez peças o tabuleiro abaixo?



Q26 – (2017) Um objeto foi construído com doze varetas iguais e seis bolinhas numeradas com
1, 2, 3, 5, 7 e 11, como na figura. Uma formiguinha caminha pelas varetas, passeando de bolinha em bolinha, a partir de uma bolinha inicial. Quando termina um passeio, ela multiplica todos os números das bolinhas que visitou e obtém um número para esse passeio. Por exemplo, ao final do passeio 3 →1→3 → 2 →3 →11→1 ela obtém 3 ×1× 3 × 2× 3 ×11×1 = 594.



a) Descreva um passeio no qual a formiguinha obtém, ao final, o número 45.
b) Explique por que a formiguinha nunca vai conseguir obter o número 52 ao final de um passeio.
c) Explique por que a formiguinha nunca vai conseguir obter o número 40 ao final de um passeio.
d) Quantos passeios diferentes a formiguinha pode fazer para obter, ao final, o número 30?

SOLUÇÃO

Q1.

A) Tio Barnabé tem que transportar uma carga total de 150× 60 + 100 × 25 = 9000 + 2500 = 11500quilos. Como a carga máxima da caminhonete é 2000 quilos, em cinco viagens Tio Barnabé poderá transportar no máximo 5 × 2000 = 10000 quilos, faltando ainda 11500 – 1000 = 1500 quilos para completar o serviço. Logo, não é possível fazer o serviço em apenas 5 viagens.

B) Tio Barnabé pode fazer 5 viagens carregando, em cada uma, 30 sacas de arroz e 8 de milho, totalizando 30× 60 + 8× 25 = 1800 + 200 = 2000 quilos. Em cinco viagens, ele levaria 30 × 5 = 150 sacas de arroz e 5 × 8 = 40 sacas de milho, restando 100 – 40 = 60 sacas de milho, pesando 60 × 25 = 1500 quilos, que poderiam ser todas transportadas na sexta viagem.

Q2.

A) Há várias soluções, como por exemplo:

$$45 \xrightarrow{apaga} 4 \xrightarrow{dobra} 8 \xrightarrow{dobra} 16 \xrightarrow{apaga} 1$$

$$45 \xrightarrow{dobra} 90 \xrightarrow{apaga} 9 \xrightarrow{dobra} 18 \xrightarrow{apaga} 1.$$

B) Aqui também há várias soluções, como por exemplo:

$$345 \xrightarrow{apaga} 34 \xrightarrow{apaga} 3 \xrightarrow{dobra} 6 \xrightarrow{dobra} 12 \xrightarrow{apaga} 1$$

$$345 \xrightarrow{apaga} 34 \xrightarrow{dobra} 68 \xrightarrow{apaga} 6 \xrightarrow{dobra} 12 \xrightarrow{apaga} 1$$

C) Aplicamos a regra "apaga" até sobrar apenas um algarismo, e temos então três casos:

1. Este algarismo é igual a 1 e a brincadeira acaba.
2. Este algarismo é 2, 3 ou 4 : neste caso aplicamos a regra "dobra" algumas vezes até obter um número de dois algarismos cujo algarismo das dezenas seja 1 (16, 12 ou 16, respectivamente), e aplica-se a regra "apaga" obtendo o número 1.
3. Este algarismos é 5, 6, 7, 8 ou 9: neste caso aplica-se a regra "dobra" uma vez, obtendo respectivamente 10,12, 14, 16 ou 18; então aplica-se a regra "apaga" para obter o número 1.

Q3.

a) Uma volta completa em torno da pista tem a extensão de 1 + 2 + 6 + 4 = 13 km. Por isso, para percorrer 14 km precisamos dar uma volta completa e percorrer mais 1 km. A única forma de percorrer mais 1 km, respeitando o sentido da corrida, é começando em A e terminando em B, portanto, a corrida deve começar em A dando uma volta completa e terminando em B.

b) Como 100 = 7 x 13 + 9, uma corrida de 100 km corresponde a dar 7 voltas completas na pista e percorrer mais 9 km., respeitando-se o sentido da corrida, é começando em A e terminando em D. Portanto, começar em A, dar 7 voltas completas, e terminar em D.

c) Como sugerido nos itens acima, a solução do problema está baseada na ideia de dar tantas voltas completas sem exceder o comprimento da corrida e depois localizar as estações convenientes para percorrer "o que falta". Do ponto de vista matemático, o que acabamos de falar é a expressão do algoritmo de divisão euclidiana de números inteiros, no caso com divisor igual a 13. Em outras palavras, temos o diagrama habitualmente utilizado na divisão euclidiana

dividendo (comprimento da corrida)	13 (divisor)
resto ("o que falta")	quociente (número de voltas completas)

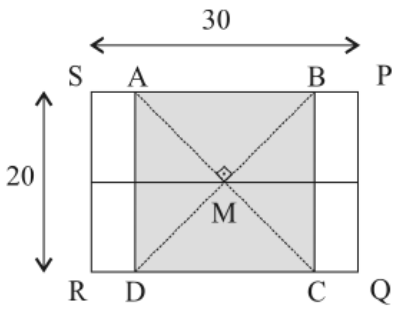
Que representa a expressão dividendo = 13 x quociente + resto, sendo o resto menor que o divisor, ou seja, nesse caso os possíveis são 0, 1, 2, ..., 11 e 12.
É possível realizar corridas de 1 km até 13km, veja:

Extensão em km	*Posto de partida*	*Posto de chegada*
1	A	B
2	B	C
3	A	C
4	D	A
5	D	B
6	C	D
7	D	C
8	B	D
9	A	D
10	C	A
12	C	B
13	B	A

1ª possibilidade: "Volta completa", basta começar em qualquer posto e terminar no mesmo posto, teremos múltiplos de 13.
2ª possibilidade: a extensão não é múltiplo de 13 e daí o que resulta são os possíveis restos que vimos na tabela acima que para todos há um inicio e um fim.

Q4.

a) Vamos representar a folha original pelo retângulo $PQRS$, e vamos considerar o quadrilátero $ABCD$ como na figura ao lado. A idéia é verificar que $ABCD$ é um quadrado, e podemos fazer isso de várias maneiras. Uma delas é a seguinte: $ABCD$ é um quadrilátero cujas diagonais



- são iguais (porque $AC = BD$),
- se cortam ao meio (porque se encontram no centro do retângulo) e
- são perpendiculares.

Um quadrilátero com essas propriedades é necessariamente um quadrado. Como $ABCD$ é um quadrado, segue que $AB = BC = PQ = 20$ cm.

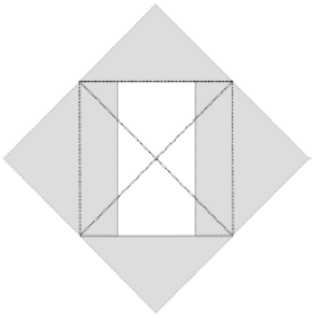
b) Seja M o centro do quadrado. A área de cada um dos triângulos AMB, BMC, CMD e DAM é igual a $\frac{1}{4}$ da área do quadrado $ABCD$, que é $20 \times 20 = 400\ \text{cm}^2$; logo a área de um desses triângulos é $\frac{400}{4} = 100\ \text{cm}^2$.

A folha original tem área igual a $20 \times 30 = 600\ \text{cm}^2$; se subtrairmos dessa área as áreas dos dois pedaços triangulares ABM e DMC, restará a área dos dois pedaços de cinco lados. Como os dois pedaços de cinco lados são iguais, eles têm a mesma área e assim a área de cada um deles é igual a

$$\frac{600 - 2 \times 100}{2} = \frac{600 - 200}{2} = \frac{400}{2} = 200\ \text{cm}^2.$$

Podemos também calcular a área de um pedaço de cinco lados de outro modo. Cada um deles é formado por um dos quatro triângulos acima e por um retângulo de altura 20 cm e largura igual a $\frac{30-10}{2} = \frac{10}{2} = 5$ cm. Como a área de cada triângulo é $100\ \text{cm}^2$ e a área do retângulo é $5 \times 20 = 100\ \text{cm}^2$, concluímos que a área de cada pedaço de cinco lados é $100 + 100 = 200\ \text{cm}^2$.

c) O quadrado formado pelos quatro pedaços e o buraco tem área igual a 8 vezes a área de cada pedaço triangular, conforme mostrado no desenho ao lado. Portanto, sua área é igual a $8 \times 100 = 800\ \text{cm}^2$. Como a soma das áreas das quatro peças é igual à área da folha original, ou seja, $600\ \text{cm}^2$, concluímos que a área do buraco é igual a $800 - 600 = 200\ \text{cm}^2$.



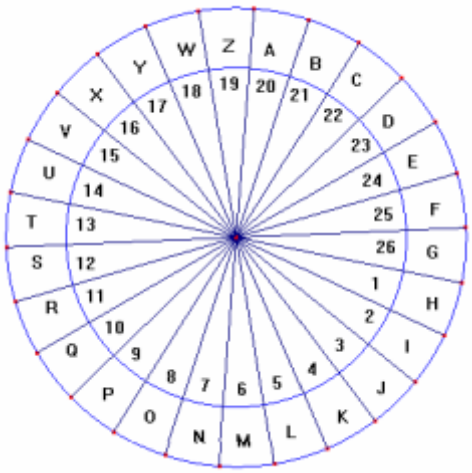
Há outras maneiras de calcular a área do buraco. Ele é um retângulo cuja altura é igual à altura da folha original, ou seja, 20 cm. Seu comprimento é a diferença entre o comprimento da folha original e o segmento AB, ou seja, $30 - 20 = 10$ cm. Portanto, a área do buraco é $20 \times 10 = 200\ \text{cm}^2$.

Q5.

(a) A partir da figura do enunciado temos 23=S, 25=U, 7=C, 22=R e 13=I. Logo a palavra codificada como 23-25-7-25-22-13 é SUCURI.

(b) Para a chave 20 temos a figura ao lado, onde vemos que O=8, B=21, M=6, E=24 e P=9. Assim, a codificação de OBMEP é 8-21-6-24-9.

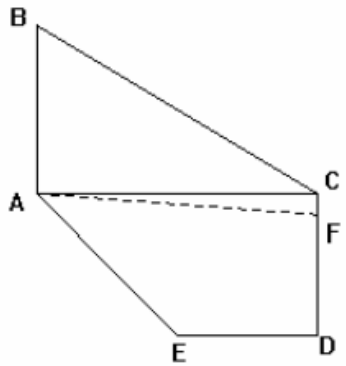
Alternativamente, ao passar da chave 5 para a chave 20 devemos somar 15 aos números da figura do enunciado, lembrando que se a soma for maior do que 26 devemos subtrair 26. Assim, temos O =19+ 15- 26= 34- 26= 8, B= 6+ 15= 21, M= 17+ 15- 26= 6, E= 9+ 15= 24, P= 20+ 15- 26= 9, donde OBMEP é codificada como 8-21-6-24-9.



(c) Como não existe letra codificada como 0, um dos números associados a letras na sequência 2620138 é o 20. À sua direita há três dígitos, mas como não há letra codificada como 138 ou 38, os números associados a letras são o 13 e o 8. Isto dá um total de 3 letras. Portanto, à esquerda de 20 só podemos admitir o 26. Logo, a codificação da palavra é 26- 20-13-8, a qual, na chave 20, corresponde a GATO.
(d) Quando somamos três números consecutivos, obtemos um número divisível por 3; por exemplo, 14 + 15 + 16 = 45. Ao somar os números que representam as letras A, B e C nessa certa chave, obtemos 52, que não é um número divisível por 3. Isso mostra que os três números não são consecutivos e isso somente é possível se um dos números for 26 e outro for 1. Como a soma é 52, o terceiro número é 52 – 27 = 25 . A única codificação de ABC, neste caso, é 25-26-1, ou seja, a chave é 25.

Q6.
(a) O time B não perdeu nenhuma partida, logo empatou ou ganhou de A. Mas A não empatou nenhuma partida, logo A perdeu de B.
(b) O time A perdeu uma partida. Se tivesse perdido exatamente mais um jogo, teria 6 pontos. Mas B tem no mínimo 6 pontos, pois venceu A e não perdeu nenhuma das outras três partidas. Como A tem mais pontos que B, concluímos que A perdeu somente para B; e como A não empatou nenhuma partida, venceu as outras três. Logo A obteve 9 pontos.
(c) Como o time B não perdeu para nenhum outro time, ele ganhou 1 ou 3 pontos em cada partida, isto é, sempre um número ímpar de pontos. Como a soma de quatro números ímpares é par, vemos que B terminou o torneio com um número par de pontos.
(d) De acordo com os itens anteriores, A perdeu de B e venceu C, D e E. Dos 6 jogos restantes, 5 foram empates. Se B tivesse só 2 empates, então todos os jogos entre C, D e E seriam empates e os dois desses times que empataram com B terminariam empatados, o que contraria o enunciado. Logo, os três jogos de B contra C, D e E foram empates. Como houve um total de 5 empates, 2 dos jogos entre C, D e E foram empates. Como a ordem de classificação é C, D, E, a única vitória foi de C contra E. Temos, assim, a tabela de resultados abaixo.

Q7.
a) A figura ao lado mostra como decompor a região ACDE em um quadrado CDEH e um triângulo AGE. Como CD = DE = 10 e AC = 20, segue que AG = 10. Logo a área do triângulo AGE é metade da área de um quadrado de lado 10, ou seja, é $\frac{AG \times GE}{2} = \frac{10 \times 10}{2} = 50m^2$. Como a área do quadrado CDEH é $10^2 = 100\ m^2$, concluímos que a área da região ACDE é 100 + 50 = 150 m^2. Alternativamente, podemos calcular a área de ACDE como a diferença entre as áreas do retângulo ACDG e do triângulo AHE, ou seja, $20 \times 10 - \frac{10 \times 10}{2} = 150\ m^2$.
A área total do terreno é então área(ACDE) área(ABC) = 150 + 120 = 270 m^2.
b) Como o terreno tem 270 m^2 , ao dividi-lo em duas partes iguais cada uma das partes terá área de 270/2 = 135 m^2 . Desse modo, devemos ter 135 = área(ABCF) + área(ABC) + área(ACF) = 120 + área(ACF) e vemos que 2 área(ACF) = 15m^2 .
Por outro lado, a área do triângulo ACF é $\frac{AC \times CF}{2} = \frac{20 \times CF}{2} = 10 \times CF$.
Portanto 10 x CF = 15 e logo CF = 1,5 m.



Q8.

a) Só existe uma maneira de preencher o diagrama, como mostramos a seguir.

• O número 9 não pode ficar abaixo de nenhum número, logo deve ficar no topo.

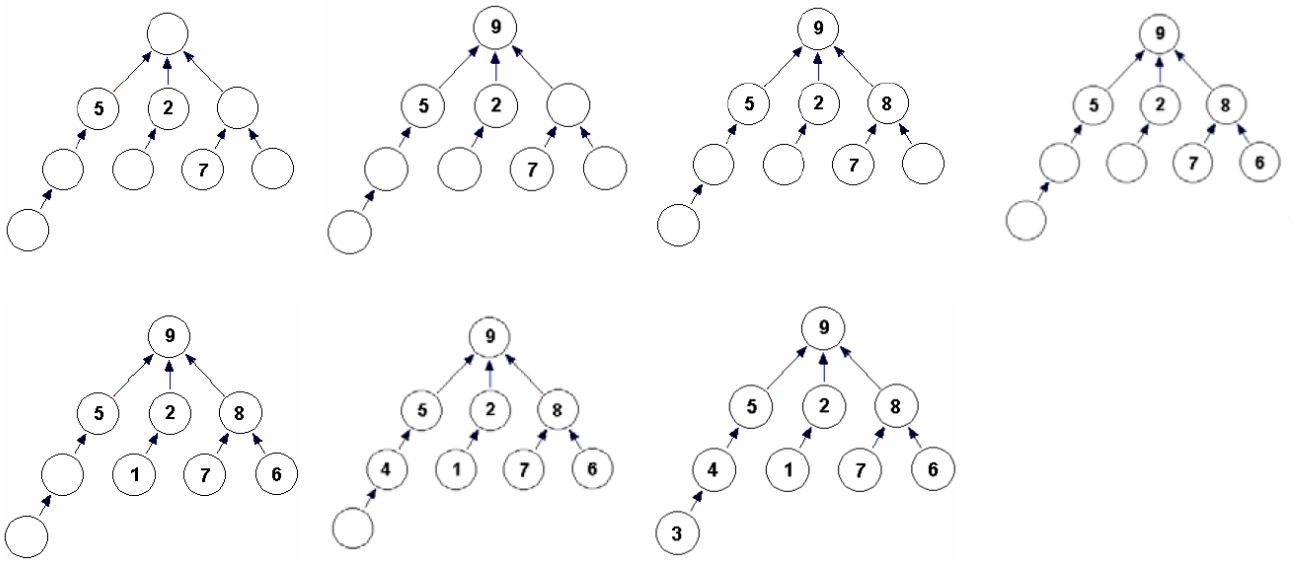
• Acima do número 7 só podemos colocar o 9 e 8. Como o 9 já está no topo, o 8 ficará acima do 7.

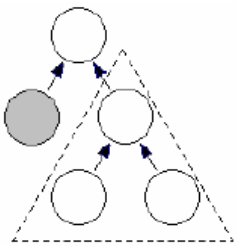
• O número 6 não pode ficar abaixo do 5 nem do 2, logo ficará abaixo do 8 , ao lado do 7.

• O número 1 é o único que pode ficar abaixo do 2.

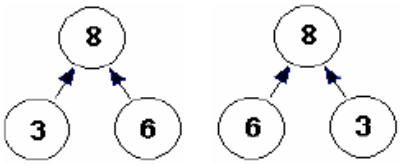
• Os números 3 e 4 devem ficar abaixo do 5, com o 3 debaixo do 4.

A sequência de figuras a seguir ilustra as etapas deste raciocínio.





b) Primeiro vamos examinar o diagrama menor de três bolinhas marcadas pelo triângulo pontilhado, à esquerda. Para que ele fique bem preenchido com quaisquer três números positivos distintos, o maior número deve ficar no topo e os outros dois poderão ser colocados nos dois círculos de baixo de 2 maneiras diferentes. Por exemplo, se os números forem 3, 6 e 8, podemos dispô-los das 2 maneiras ilustradas à direita.



Para que o diagrama completo do problema fique bem preenchido com os números de 1 a 5, o 5 deve ficar no topo. A casa sombreada pode ser preenchida com qualquer número de 1 a 4. As três casas restantes, marcadas com o triângulo pontilhado, formam o diagrama analisado acima e poderão então ser preenchidas de 2 maneiras, com os três números restantes. Resumindo, podemos preencher o diagrama do seguinte modo:

• preenchemos o círculo do topo com o 5: 1 possibilidade;

• preenchemos a casa sombreada com 1, 2, 3 ou 4: 4 possibilidades;

• preenchemos as três casas que faltam com os três algarismos restantes: 2 possibilidades.

Logo o diagrama pode ser preenchido de $1 \times 4 \times 2 = 8$ maneiras diferentes. Notamos que este raciocínio se aplica para quaisquer cinco números positivos distintos. Isto será importante na resolução do próximo item.

c) Para que o diagrama fique bem preenchido com os números de 1 a 7, temos que colocar o 7 no topo. A casa sombreada pode ser preenchida com qualquer número de 1 a 6. A parte circundada

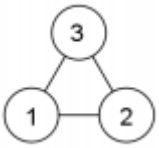
pela linha pontilhada foi analisada no item (b) e pode ser preenchida com os 5 números restantes de 8 formas diferentes. Ou seja, podemos preencher o diagrama como segue:

• preenchemos o círculo do topo com o 7: 1 possibilidade;
• preenchemos a casa sombreada com 1, 2, 3, 4, 5 ou 6: 6 possibilidades;
• preenchemos a parte circundada com os algarismos restantes: 8 possibilidades.

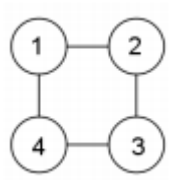
Logo o diagrama pode ser preenchido de 1× 6 × 8 = 48 maneiras diferentes.

Q9.

a) Ana pode pintar a bolinha 1 com qualquer uma das três cores. A bolinha 2 deve então ser pintada de uma cor diferente da primeira, restando a Ana duas cores para pintá-la. A bolinha 3 deve ser pintada com a cor que sobrar. Portanto, a figura 1 pode ser pintada de 3x2x1= 6 maneiras diferentes.



b) Vamos dividir as maneiras de pintar a figura 2 em dois casos.

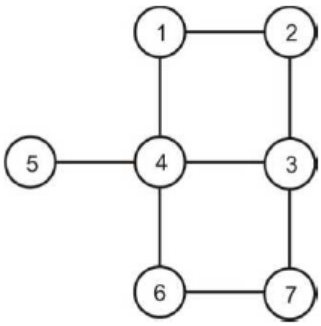


<u>1º caso</u>: as bolinhas 1 e 3 são pintadas da mesma cor. Essa cor pode ser escolhida de três maneiras diferentes; após esta escolha, a cor da bolinha 2 pode ser escolhida de duas maneiras diferentes, bem como a da bolinha 4. O número de maneiras de pintar a figura 2 nesse caso é 3x2x2= 12.

<u>2º caso</u>: as bolinhas 1 e 3 são pintadas de cores diferentes. Nesse caso, a cor da bolinha 1 pode ser escolhida de três maneiras diferentes e após isso, restam duas possibilidades para a cor da bolinha 3. Para as bolinhas 2 e 4 há apenas uma possibilidade, que é a cor que não foi usada nas bolinhas 1 e 3. Logo o número de maneiras de pintar a figura 2 nesse caso é 3x2x1= 6. No total, a figura 2 pode ser pintada de 12+ 6= 18 maneiras diferentes.

(c) As bolinhas de 1 a 4 formam a figura do item anterior e, portanto, para pintá-las, Ana tem 18 possibilidades. Para pintar a bolinha 5, ele tem duas cores disponíveis, pois a bolinha 4 já está pintada. Logo temos 18× 2= 36 possibilidades para pintar as bolinhas de 1 a 5. Dividimos agora nossa contagem em dois casos:

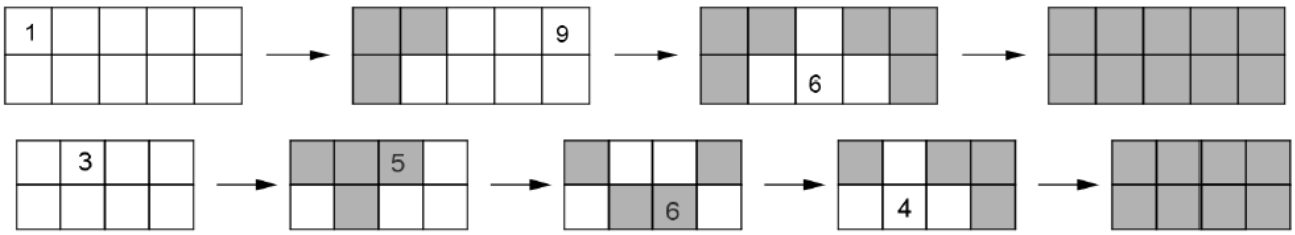
<u>1º caso</u>: as bolinhas 3 e 6 são pintadas da mesma cor. Nesse caso, temos uma escolha para a cor da bolinha 6 (pois a bolinha 3 já foi pintada) e duas para a bolinha 7, ou seja, temos 1× 2= 2 possibilidades.



<u>2º caso</u>: as bolinhas 3 e 6 são pintadas de cores diferentes. Nesse caso também temos uma única escolha para a cor da bolinha 6 (diferente das cores das bolinhas 3 e 4) e sobra apenas uma cor para a bolinha 7. Aqui temos apenas uma possibilidade. No total, há 36 × 2 + 36x1 = 108 maneiras diferentes de pintar a figura 3.

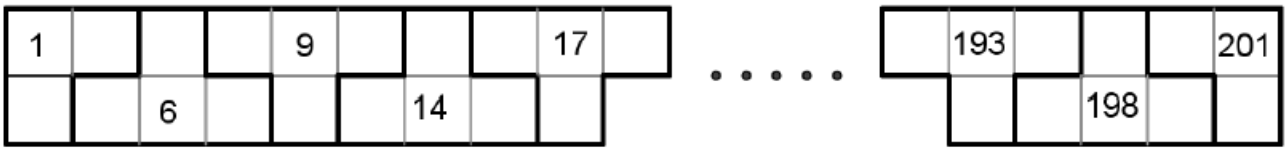
Q10.

a) Mostramos abaixo um jogo completo para cada tabuleiro, destacando as casas apertadas.



b) Dividimos o tabuleiro 2x100 em 25 retângulos 2x4 e, em cada um desses retângulos, tornarmos as casas cinzas procedendo como ilustrado no item (a); notamos que ao aplicar este procedimento em um retângulo os demais não são afetados. Desse modo podemos preencher todas as casas do jogo 2x100.

c) Dividimos o tabuleiro como ilustrado na figura a seguir.



Na primeira linha selecionamos as casas 1, 9, 17,... , 193, 201 e na segunda as casas 6, 14, 22,..., 190, 198. Cada uma das casas selecionadas está dentro de uma região destacada com traço mais forte. Ao apertar uma destas casas, ela e todas as outras casas de sua região ficam cinzas, sem afetar as outras regiões. Apertando todas estas casas podemos então preencher todas as casas do jogo 2x101.

Notamos que há uma casa selecionada de duas em duas colunas, começando da primeira à esquerda, e uma na última coluna. Como as colunas são em número de 101, vemos que foram selecionadas 51 casas, que é o número de jogadas que foram necessárias para terminar o jogo do modo descrito.

d) Não é possível acabar o jogo 2x101 com menos de 51 jogadas, pois cada jogada muda a cor de no máximo quatro casas. Assim com 50 jogadas ou menos conseguiremos mudar a cor de no máximo 50x4 = 200 casas, mas no jogo 2x101 devemos mudar a cor de 202 casas. Logo é impossível fazer menos do que 51 jogadas e deixar cinzas todas as casas.

Observação: A solução dos itens (b) e (c) mostra como terminar o jogo no caso de tabuleiros $2n$, onde n deixa restos 0 ou 1 quando dividido por 4. É interessante completar a análise nos casos em que os restos são 2 ou 3; deixamos isto para o(a) leitor(a).

Q11.

a) Para saber o número que deve dizer ao matemágico, Joãozinho deve fazer quatro contas:

1ª conta: multiplicar o número no cartão escolhido por 2;

2ª conta: somar 3 ao resultado da primeira conta;

3ª conta: multiplicar por 5 o resultado da segunda conta;

4ª conta: somar 1, 2, 3 ou 4 ao resultado da terceira conta, dependendo da cor do cartão escolhido.

Como o número no cartão escolhido por Joãozinho foi 3, o resultado da primeira conta é 3 x 2 = 6; o resultado da segunda conta é e o da terceira conta é 6 + 3 = 9. Por fim, como a cor do cartão escolhido por Joãozinho é vermelha, o resultado da quarta e última conta é 45 + 4 = 49. Assim Joãozinho deve dizer "Quarenta e nove" ao matemágico.

b) Vamos analisar o que acontece com o número de um cartão quando fazemos as operações indicadas. Qualquer que seja esse número, após a terceira conta obtemos um múltiplo de 5, ou seja, um número cujo algarismo das unidades é 0 ou 5. Concluímos então que, todas as contas estando corretas, o algarismo das unidades do número dito, ao matemático é:

- 1 ou 6, se o cartão escolhido é verde;
- 2 ou 7, se o cartão escolhido é amarelo;
- 3 ou 8, se o cartão escolhido é azul;

• 4 ou 9, se o cartão escolhido é vermelho.

Desse modo, se Mariazinha disse 76 ao matemágico, seu cartão era verde e o resultado da terceira conta realizada por ela foi 76 – 1 = 75; o resultado da segunda conta foi 75 ÷ 5 = 15; o resultado da primeira conta foi 15 – 3 = 12 e o número no cartão escolhido por Mariazinha foi 12 ÷ 2 = 6. Conferindo: (2 x 6 + 3) x 5 + 1 = 76.

c) Quando Pedrinho disse 61 ao matemágico, ele pensou assim: se as contas de Pedrinho estiverem corretas, o cartão deve ser verde (pois o algarismo das unidades de 61 é 1) e depois da terceira conta o número obtido foi 61 – 1 = 60, depois da segunda conta o número obtido foi 60 ÷ 5 = 12, depois da primeira conta o número obtido foi 12 – 3 = 9 e então o número no cartão deve ser 9 ÷ 2 = 4,5, o que não pode acontecer pois os números nos cartões são números inteiros. Logo Pedrinho deve ter errado alguma conta.

Q12.

a) Somar as somas das linhas é o mesmo que somar todos os números no quadrado; assim, a soma das somas das linhas é 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45. O mesmo se pode dizer da soma das somas das colunas, e concluímos que a soma de todas as somas é 2 x 45 = 90. Logo a soma que está faltando é 90 - (9 + 13 + 14 + 17 + 18) = 90 – 71 = 19.

b) Se todas as somas fossem pares, as somas das três linhas seriam pares e sua soma seria par. Mas isso é impossível, pois, como vimos acima, a soma das somas das três linhas é 45, que é um número ímpar.

c) Vamos estender um pouco essa solução para determinar não apenas um, mas todos os quadrados que têm as somas dadas. Antes de começar, notamos que trocar a ordem de duas linhas (ou de duas colunas) não altera as somas de um quadrado.

Os seis números do resultado final devem ser separados em dois grupos de três números cada, cujas somas sejam iguais a 45. No primeiro grupo, cada número é a soma de uma linha e, no outro, a soma de cada coluna. De acordo com o item anterior, cada grupo deve conter um número ímpar; logo 7 e 13 devem ficar em conjuntos diferentes. Segue imediatamente que a única possibilidade é separar as somas nos grupos 7, 16, 22 e 13, 14, 18; podemos então supor que as somas das linhas são 7, 16, 22 e as somas das colunas são 13, 14, 18.

Como a única maneira de obter a soma 7 é 1 + 2 + 4 = 7, podemos começar a preencher o quadrado como à direita. Suponhamos que a soma da segunda linha seja 22; as únicas possibilidades para a soma 22 são 5 + 8 + 9 e 6 + 7 + 9, que vamos considerar separadamente.

1	2	4	7

1	2	4	7
		8	22
		6	16
		18	

Suponhamos primeiro que na segunda linha aparecem os números 5, 8 e 9. Aqui o 5 não pode aparecer na coluna do 4, pois 4 + 5 = 9 e para obter uma das somas 13, 14 ou 18 nessa coluna o terceiro número deveria ser 4, 5 ou 9, respectivamente, o que não pode acontecer pois o 4 já foi usado enquanto que 5 e 9 aparecem na segunda linha; argumento análogo mostra que o 9 também não pode aparecer na coluna do 4, ou seja, o 8 aparece abaixo do 4. Como 4 + 8 = 12 e tanto o 1 como o 2 já foram usados, a soma dessa coluna não pode ser 13 ou 14; logo a soma é 18. Podemos agora completar o quadrado das seguintes maneiras:

1	2	4	7
5	9	8	22
7	3	6	16
13	14	18	

1	2	4	7
9	5	8	22
3	7	6	16
13	14	18	

Deixamos para o(a) leitor(a) mostrar que, quando na segunda linha aparecem os números 6, 7 e 9, as possibilidades são

1	2	4	7
7	9	6	22
5	3	8	16
13	14	18	

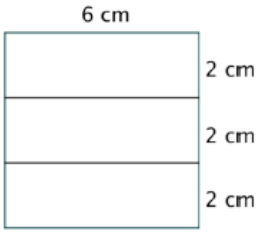
1	2	4	7
9	6	7	22
8	5	3	16
18	13	14	

1	2	4	7
9	7	6	22
3	5	8	16
13	14	18	

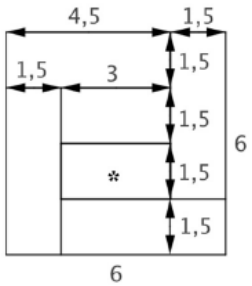
1	2	4	7
9	7	6	22
8	5	3	16
18	13	14	

Desse modo, existem apenas seis quadrados com as somas do enunciado, a menos de troca de posição de linhas, (troca de posição de colunas e troca das linhas pelas colunas.)

Q13.

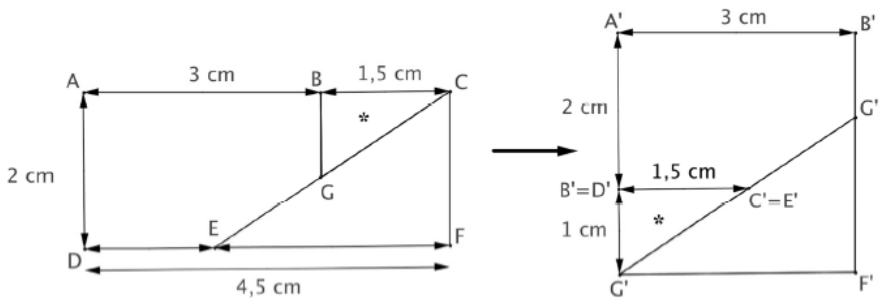


a) Como o quadrado formado com os três retângulos recortados da primeira tira tem área 36 cm^2, seu lado mede 6 cm. Logo o comprimento dos retângulos é 6 cm e sua largura é um terço de seu comprimento, ou seja, 2 cm.



b) Como no item anterior, o lado do quadrado formado com os seis retângulos recortados da segunda tira mede 6 cm. Como todos os retângulos tem a mesma largura, a figura mostra que essa largura é um quarto da medida do lado, isto é, 1,5 cm. As medidas dos outros retângulos são então determinadas imediatamente, como indicado. Em particular, as dimensões do retângulo destacado são 3 cm e 1,5 cm; logo seu perímetro é 1,5 +1,5 + 3 + 3 + 9 = 9cm e sua área é 1,5 × 3 = 4,5cm^2.

c) Na figura abaixo mostramos o retângulo e o quadrado, com pontos correspondentes indicados com a mesma letra; por exemplo, o segmento AB à esquerda corresponde ao segmento A'B' à direita. A área do retângulo é 2 × 4,5 = 9 cm^2, que é também a área do quadrado; logo o lado do quadrado mede 3 cm.



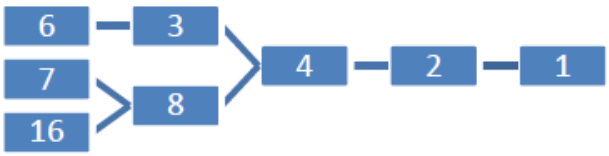
Desse modo, os segmentos A'B' e B'F' medem 3 cm e assim AB mede 3 cm. Como o lado do retângulo mede 4,5 cm, segue que BC mede 4,5 - 3 = 1,5cm, que é então a medida de B'C'. Finalmente, a medida de A'B é a mesma que a de AD, que é 2 cm; logo a medida de B'C' é 3 - 2 = 1 cm. Assim, obtemos as medidas *BG* = 1 cm e *BC* = 1,5 cm dos catetos do triângulo retângulo BCG, cuja área é então $\frac{1}{2}$ x 1x 1,5 = 0,75 cm^2.

Q14.

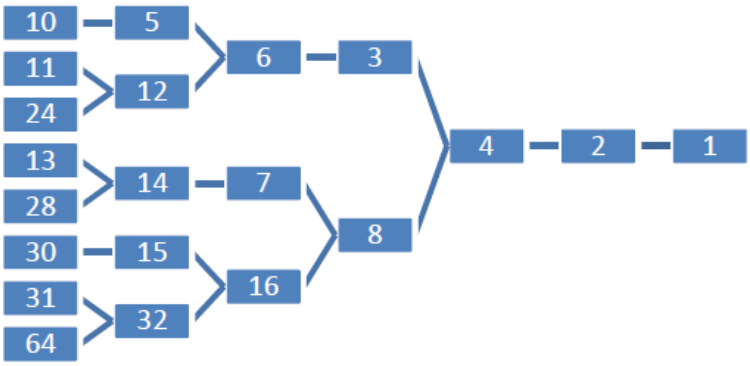
a) A sequência é 37 → 38 → 19 → 20 → 10 → 5 → 6 → 3 → 4 → 2 → 1.

b) A única sequência de comprimento 3 é 4 → 2 → 1. As sequências de comprimento 4 são 3 → 4 → 2 → 1 e 8 → 4 → 2 → 1; elas são obtidas a partir de 4 → 2 → 1, a primeira acrescentando 4 - 1 = 3 à esquerda e a segunda acrescentando 2 × 4 = 8 à esquerda. Do mesmo modo, a sequência ímpar 3 → 4 → 2 → 1 dá origem à sequência par 6 → 3 → 4 → 2 → 1; a sequência par 8 → 4 → 2 →

1 dá origem à sequência ímpar 7 → 8 → 4 → 2 → 1 e à sequência par 16 → 8 → 4 → 2 → 1. Temos assim as três únicas sequências de comprimento 5, sendo 2 pares e 1 ímpar. O raciocínio pode ser representado pelo esquema abaixo.



c) Repetindo o esquema do item anterior, temos:

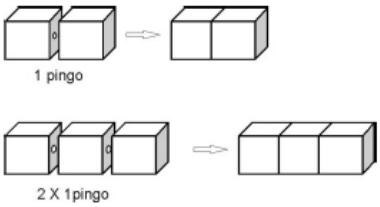


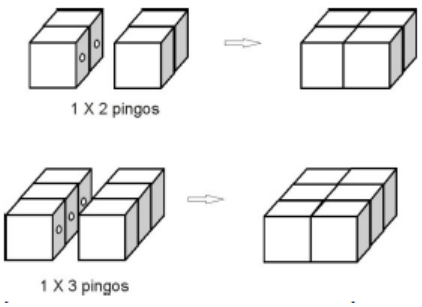
e assim temos 3 sequências pares e 2 ímpares de comprimento 6 e 5 sequências pares e 3 ímpares de comprimento 7.

d) As 144 sequências ímpares de comprimento quinze dão origem a 144 sequências pares de comprimento dezesseis; já as 233 sequências pares de comprimento quinze dão origem a 233 sequências pares de comprimento dezesseis e 233 sequências ímpares de comprimento dezesseis. Assim, temos 233 sequências ímpares de comprimento dezesseis e 377 = 233 +144 sequências pares de comprimento dezesseis, num total de 233 + 377 = 610 sequências.

Q15.

Para contar os pingos de cola que usa para montar sólidos, Cláudia começa contando quantos pingos de cola usa para fazer uma carreira de cubinhos. Para isso, ela precisa de tantos pingos quantos são os cubinhos, menos um. Assim, usa 1 pingo para unir 2 cubinhos, 2 pingos para unir 3 cubinhos, e assim por diante. Para unir duas carreiras iguais, ela usa tantos pingos quantos são os cubinhos de uma carreira. Logo, para colar 2 carreiras de 2 cubinhos, usa 2 pingos, para colar 2 carreiras de 3 cubinhos usa 3 pingos, e assim por diante.





Para formar camadas com altura de 1 cubinho, ela junta carreiras iguais. Para formar uma camada 2x2, Cláudia une duas carreiras de dois cubinhos cada. O número total de pingos de cola é 1×2 + 2×1 = 1×2× 2 = 4.

Para formar uma camada 2 × 3 , ela cola 2 carreiras de 3 cubos cada, usando um total de 1× 3 + 2 × 2 = 7 pingos.

Para formar uma camada 3 × 3 , ela junta 2 carreiras de 3 cubinhos cada e, em seguida, mais uma carreira de 3 cubinhos

cada, num total de 2 × 3 + 3 × 2 = 2 × 2 × 3 = 12 pingos. De maneira semelhante, para formar uma camada 4 × 4 ela une 4 carreiras de 4 cubinhos, usando 3 × 4 + 4 × 3 = 2 × 3 × 4 = 24 pingos, para uma de 5 × 5 , ela usa 2 × 4 × 5 = 40 , etc.

a) Para formar um cubo de 2 cm de aresta, Cláudia deve colar duas camadas 2×2 de cubinhos de 1 cm de aresta. Como vimos acima, em cada camada ela usa 4 pingos; logo, para formar as 2 camadas, ela usará 2 × 4 = 8 pingos. Como cada camada tem 4 cubinhos, para colar as duas camadas irá usar mais 4 pingos. No total, ela irá usar 8 + 4 = 12 pingos.

b) Para montar um cubo de aresta 3 cm, ela irá colar 3 camadas 3 × 3 de cubinhos. Como vimos acima, para formar cada uma dessas camadas ela usa 12 pingos, logo para montar as 3, ela irá usar 3 × 12 = 36 pingos. Como cada camada tem 9 cubinhos, para colar duas camadas, ela precisará de 9 pingos e, para colar a terceira camada, mais 9 pingos. No total, irá usar 36 + 2 × 9 = 54 pingos.

c) Para montar uma camada 3 × 3 , Cláudia usa 12 pingos de cola; para montar uma camada 5 × 5 , usa 40 pingos e para montar uma camada 7 x 7, usa 2 × 6 × 7 = 84 pingos. Para colar um cubinho na camada 3 × 3 , ela usa 1 pingo; para colar a camada 3 × 3 na camada de baixo ela usa 9 pingos (pois a camada 3 x 3 tem 9 cubinhos) e para colar a camada 5 × 5 na camada de baixo, ela usa 25 pingos (esta camada tem 25 cubinhos). Portanto, o número total de pingos de cola para montar o sólido é 12 + 40 + 84 + 1+ 9 + 25 = 171.

Q16.

a) A figura I indica, com o número 3, os quadrados contaminados no terceiro estágio e apresenta o resultado da contaminação ao final deste estágio.

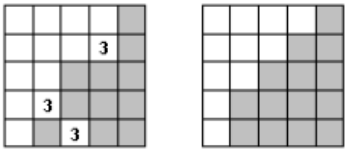


Figura I

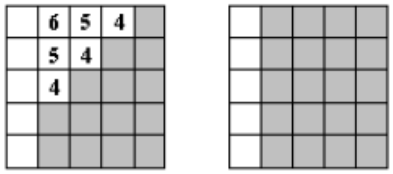


Figura II

b) A figura II indica os quadrados contaminados em cada estágio subsequente e mostra o resultado final da contaminação.

c) Os perímetros de contaminação no terceiro e no último estágios, destacados na figura III, são ambos iguais a 18 (correspondentes a 8 lados horizontais e 10 lados verticais de quadrados).

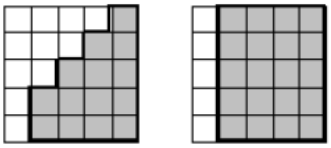


Figura III

d) Há várias configurações com 5 quadradinhos que levam à completa contaminação; a mais simples é a formada por 5 quadradinhos em uma diagonal.

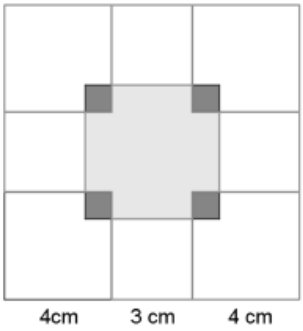
e) Ao se acrescentar um quadrado à contaminação, cada lado exposto (ou seja, não em contato com outros quadrados) faz o perímetro de contaminação aumentar de uma unidade, enquanto cada lado em contato faz o perímetro diminuir de uma unidade.

Portanto, a variação do perímetro de contaminação é igual à diferença entre o número de lados expostos e o número de lados em contato. Como um quadrado deve ter pelo menos dois lados em contato com outros quadrados para ser contaminado, esta diferença é sempre menor ou igual a zero. A tabela abaixo mostra os três casos possíveis:

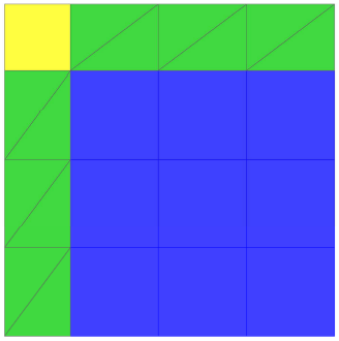
lados em contato	lados expostos	variação do perímetro
2	2	$2-2=0$
3	1	$1-3=-2$
4	0	$0-4=-4$

e) Quando todos os quadrados estão contaminados, o perímetro de contaminação é igual a 4 × 5 = 20 . Por outro lado, o perímetro de uma contaminação com *n* quadrados é no máximo igual a 4*n*, que ocorre quando os *n* quadrados não têm lados em comum.
Como o perímetro de contaminação nunca aumenta, para que esta contaminação seja capaz de contaminar todo o tabuleiro, é necessário que 4*n* seja no mínimo igual a 20; ou seja, *n* deve ser no mínimo igual a 5.

Q17.
Cada uma das peças amarelas tem área 3x3 = 9 cm^2, as azuis têm 4x4 =16 cm^2 e as verdes têm (3x4)/2 = 6 cm^2.
a) O hexágono montado por Dafne é composto por duas peças verdes, uma amarela e uma azul. Portanto, sua área é igual a 2x6 + 9 +16 = 37 cm^2.
b) A figura construída forma um quadrado de lado 4 + 3 + 4 = 11 cm, cuja área é 11x11=121 cm^2. Ele é composto de 4 amarelas e 4 peças azuis; a área total dessas peças é 4x9 + 4x16 = 100 cm^2. A área do buraco é a área do quadrado menos a soma das áreas dessas peças, ou seja, é igual a 121-100 = 21 cm^2.
Alternativamente, podemos pensar no buraco (em cinza claro) como um quadrado de 5 cm de lado do qual foram retirados, nos cantos, quadradinhos de lado 1 cm (em cinza escuro); sua área é então 5x5 – 4x1x1= 21 cm^2.



c) Uma possível maneira de preencher o quadrado 15x15, como pedido, é mostrado na figura ao lado.



d) Um quadrado de lado 15 cm tem 15x15 = 225 cm^2; observamos que 225 é um número ímpar. A peça azul tem área 16 cm^2 e a verde tem área 6 cm^2, ambos números pares.
Logo não é possível preencher o quadrado de lado 15 cm apenas com peças desse tipo, pois a soma de números pares é par. Segue que para preencher o quadrado de lado 15 cm com as peças do enunciado é necessário usar pelo menos uma peça amarela.

Q18.
a) No tabuleiro dado aparecem somas ímpares na primeira e segunda linhas, primeira e segunda colunas e na diagonal principal. Desse modo, a nota desse tabuleiro é 5.
b) Abaixo temos 4 tabuleiros com nota 8

1	1	1
1	1	1
1	1	1

1	0	0
0	1	0
0	0	1

0	0	1
0	1	0
1	0	0

0	1	0
1	1	1
0	1	0

É possível mostrar que estes são os únicos tabuleiros com nota 8; deixamos isso como exercício.
c) Ao trocar o número de um dos cantos do tabuleiro, soma-se 1 (caso a troca tenha sido de 0 para 1) ou subtrai-se 1 (caso a troca tenha sido de 1 para 0) aos totais de da linha, da coluna e

da diagonal que se encontram nesse canto. Assim, das oito somas (três linhas, três colunas e duas diagonais), três trocam de paridade e as outras não mudam. Observamos agora que:

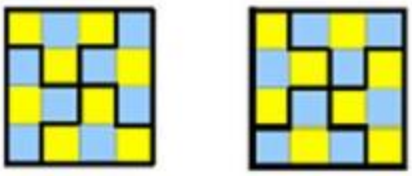
- se essas três somas são ímpares, após a troca a nota diminuirá de 3;
- se duas dessas somas são pares e uma é ímpar, após a troca a nota aumentará de 1;
- se duas dessas somas são ímpares e uma é par, após a troca a nota diminuirá de 1;
- se essas três somas são pares, após a troca a nota aumentará de 3.

Em qualquer caso, vemos que se a nota original do tabuleiro é par (ou ímpar), ela se tornará ímpar (ou par), pois aumentará ou diminuirá de 1 ou 3.

Para preencher todas as casas de um tabuleiro, exceto (por exemplo) a do canto superior direito, temos $2x2x2x2x2x2x2x2 = 2^8 = 256$ possibilidades. O item anterior mostra que, uma vez essas casas preenchidas, há apenas uma maneira de preencher a casa do canto superior direito de modo que a nota desse tabuleiro seja ímpar, e concluímos que o número de tabuleiros de nota ímpar é 256. Alternativamente, podemos concluir do item anterior que se um tabuleiro tem nota par (ou ímpar), ao trocar o algarismo da casa do canto superior direito teremos um tabuleiro de nota ímpar (ou par). Isso mostra que a cada tabuleiro de nota par corresponde um de nota ímpar e vice-versa, ou seja, o número de tabuleiros de nota ímpar (ou par) é a metade do número total de tabuleiros, que é $\frac{2^9}{2} = 2^8$.

Q19.

a) As figuras abaixo apresentam as duas únicas maneiras possíveis, a menos de rotação, de cobrir o tabuleiro 4x4.



b) Cada peça cobre exatamente 4 quadradinhos, e portanto 20 peças cobrem uma área formada por 80 quadradinhos. Como 80 não é um número quadrado perfeito, não existe um tabuleiro quadrado com exatamente 80 quadradinhos.

c) Para cobrir um tabuleiro 10x10, são necessárias 25 peças, uma vez que 100 = 4 x 25. Cada peça cobre 3 quadradinhos de uma cor e 1 da outra cor. Assim podemos dividir as peças que cobrem o tabuleiro em dois grupos:

Grupo 1: As que cobrem exatamente uma casa amarela (e, portanto, três azuis).

Grupo 2: As que cobrem exatamente três casas amarelas (e, portanto, uma azul).

Suponha que fosse possível distribuir as 25 peças sobre o tabuleiro cobrindo todas as suas casas.

Se o número de peças do Grupo1 for par, o número de peças do Grupo 2 deve ser ímpar, pois a soma desses números deve ser igual à quantidade de peças usadas (25). Neste caso, o número de casas azuis cobertas deve ser ímpar, mas isto é impossível, já que há 50 casas azuis num tabuleiro 10x10.

Se o número de peças do Grupo1 for ímpar, o número de peças do Grupo 2 deve ser par, pois, pelo mesmo motivo, a soma do número de peças destes dois grupos deve ser 25. Neste caso, o número de casas amarelas cobertos deve ser ímpar, mas isto é impossível, já que também há 50 casas amarelas num tabuleiro 10x10.

Q20.

a) Basta observar na tabela o número que se apresenta na linha do F e na coluna do B, que é o número 2. Portanto, F ultrapassou B duas vezes.

b) A casa amarela representa quantas vezes o atleta B ultrapassou o atleta D. No início da corrida B estava à frente de D e como D foi o vencedor da corrida, temos a certeza de que B terminou atrás de D. Portanto, B ultrapassou D uma vez a menos do que D ultrapassou B. Como D ultrapassou B duas vezes, podemos afirmar que B ultrapassou D uma única vez.

c) A casa verde representa quantas vezes o atleta E ultrapassou o atleta B. No início da corrida E estava atrás de B e como E foi o último colocado da corrida, temos a certeza de que E terminou atrás de B. Portanto, E ultrapassou B tantas vezes quanto B ultrapassou E. Como B ultrapassou E três vezes, E também ultrapassou B três vezes.

d) Já sabemos que D ganhou a corrida e que E foi o último colocado. Comparando os números escritos em posições simétricas em relação à diagonal cinza, concluímos que:

- A começou à frente de B, C e F.
- Como o número de ultrapassagens de A sobre B é igual ao número de ultrapassagens de B sobre A, concluímos que A e B terminaram na mesma posição relativa que começaram a corrida, ou seja, A terminou à frente de B.
- Do mesmo modo, como o número de ultrapassagens de A sobre C é igual ao número de ultrapassagens de C sobre A, concluímos que A e C terminaram na mesma posição relativa que começaram a corrida, ou seja, A terminou à frente de C.
- Por outro lado, como o número de ultrapassagens de A sobre F é igual ao número de ultrapassagens de F sobre A menos 1, concluímos que A terminou atrás de F.

	A	B	C	D	E	F
A	-	2	4	2	1	2
B	2	-	0	1	3	1
C	4	0	-	4	1	3
D	3	2	5	-	1	3
E	1	3	1	1	-	0
F	3	2	4	3	1	-

Com isso já podemos concluir que F terminou à frente de A, B e C. Mas B começou à frente de C não houve ultrapassagens entre B e C, logo B terminou à frente de C.

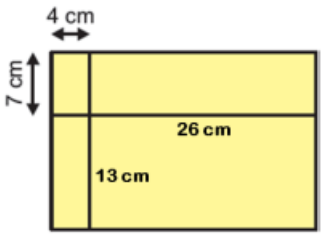
Portanto, a corrida terminou na seguinte ordem:

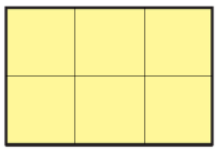
1º. lugar: D – 2º. lugar: F – 3º. lugar: A – 4º. lugar: B – 5º. lugar: C – 6º. lugar: E.

Q21.

a) O maior dos quatro retângulos tem lados de medida 30 – 4 = 26 cm e 20 – 7 = 13 cm.

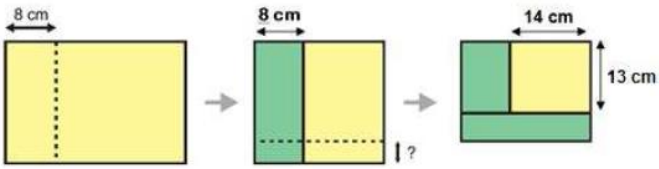
Logo, sua área é 26 x 13= 338 cm^2.





b) Com um traço horizontal e dois verticais geramos os quadrados de maior área possível. Para formar apenas quadrados, o valor dos lados desses quadrados deve dividir 20 e 30. A maior área ocorre, então, quando o lado desses quadrados for o máximo divisor comum de 20 e 30, ou seja, 10 cm.

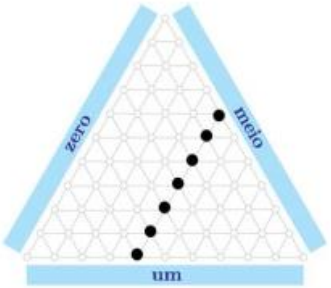
c) Vamos chamar a distância da segunda dobra até a margem inferior da folha de *altura da dobra*. Como a folha tem 30 cm de largura e a primeira dobra foi feita a 8 cm da



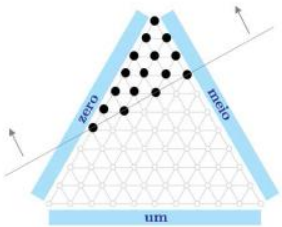
margem direita da folha, a largura da região em amarelo da última figura é igual a 30 cm menos duas vezes 8 cm, ou seja, 30 – 16 = 14 cm.
Após a segunda dobra, o dobro da altura do retângulo amarelo será a diferença entre seu perímetro e o dobro de sua largura, ou seja, 54 – 28 = 26 cm. Portanto, a altura do retângulo amarelo na terceira figura é 13 cm. Assim, da altura da folha original sobraram 20 – 13 = 7 cm para a realização da segunda dobra e, portanto, a altura da dobra é a metade, ou seja, 7 ÷ 2 = 3,5 cm.

Q22.
a) O aluno D obteve nota zero em 1 questão, nota meio em 5 questões e nota um em 4 questões. Sendo assim, a nota obtida pelo aluno D na prova foi 1 × 0,0 + 5 × 0,5 + 4 × 1,0 = 6,5.

b) Há sete possibilidades de um aluno tirar nota zero em 4 questões.



- 1,0 + 1,0 + 1,0 + 1,0 + 1,0 + 1,0 = 6 x 1,0 + 0 x 0,5 + 4 x 0,0
- 1,0 + 1,0 + 1,0 + 1,0 + 1,0 + 0,5 = 5 x 1,0 + 1 x 0,5 + 4 x 0,0
- 1,0 + 1,0 + 1,0 + 1,0 + 0,5 + 0,5 = 4 x 1,0 + 2 x 0,5 + 4 x 0,0
- 1,0 + 1,0 + 1,0 + 0,5 + 0,5 + 0,5 = 3 x 1,0 + 3 x 0,5 + 4 x 0,0
- 1,0 + 1,0 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 = 2 x 1,0 + 4 x 0,5 + 4 x 0,0
- 1,0 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 = 1 x 1,0 + 5 x 0,5 + 4 x 0,0
- 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 = 0 x 1,0 + 6 x 0,5 + 4 x 0,0



c) Há 16 possibilidades do aluno obter nota 7,0 ou maior do que 7,0, como está ilustrado na figura ao lado.

Q23.
a) A figura em questão é formada pela junção de duas peças. Ela é formada por oito quadradinhos de 1 cm de lado, e seu contorno contém exatamente 16 lados desses quadradinhos. Logo, o perímetro dessa peça é 16 vezes 1 cm, ou seja, é igual a 16 cm.
b) Há muitas soluções, as quais podem diferir no formato ou na posição. Aqui estão dois exemplos:

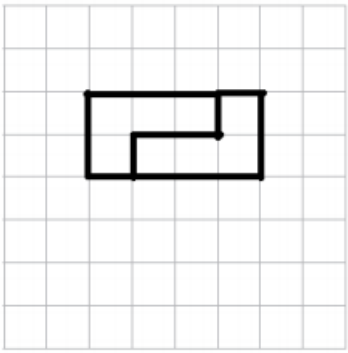


Figura com perímetro igual a 12 cm

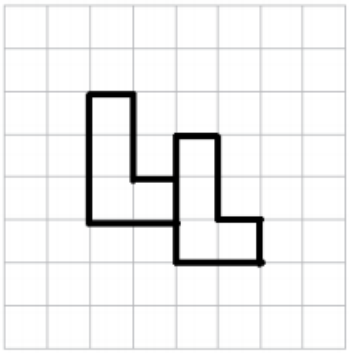
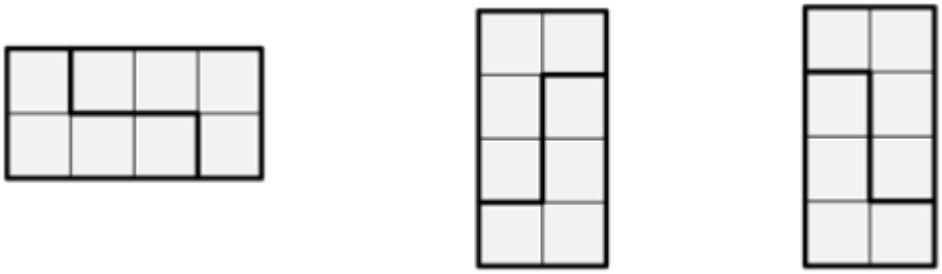


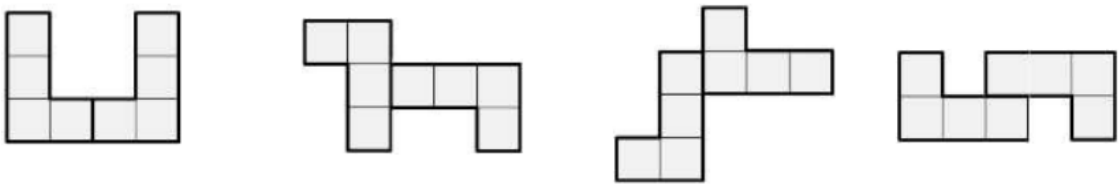
Figura com perímetro igual a 18 cm

Para formar uma figura com perímetro igual a 12 cm, Roberto deve juntar as duas peças de tal modo que o contorno da figura formada tenha somente 12 lados de quadradinhos. Como cada

peça contém 10 lados de quadradinhos em seu contorno e como ele junta as peças coincidindo lados de quadradinhos, Roberto terá de fazer coincidir quatro pares de lados de quadradinhos para formar uma figura com perímetro igual a 12 cm. Isso apenas é possível se ele juntar as peças formando um retângulo. Veja algumas outras possibilidades:



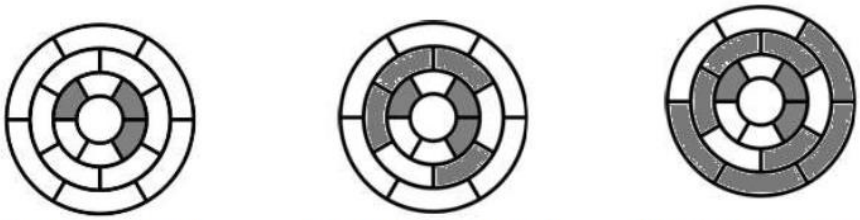
Agora, para formar uma figura com perímetro igual a 18 cm, Roberto tem de juntar as duas peças de tal modo que o contorno da figura formada tenha 18 lados de quadradinhos, ou seja, ele terá de fazer coincidir apenas um par de lados de quadradinhos. Como foi dito, existem várias maneiras de formar essas figuras; veja mais alguns exemplos:



c) Quando as duas peças não estão em contato, o perímetro total é 20 cm. Depois de juntar duas peças, o perímetro da figura formada pelas duas peças é diminuído de um número par, já que os lados em contato de quadradinhos não contribuem para o perímetro da figura formada, pois ficam internos a ela. Como duas peças soltas têm perímetro 20 cm, é impossível obter, juntando duas peças de acordo com as condições descritas no enunciado, uma figura com um perímetro ímpar. Mas 15 é ímpar e, assim, não há figuras (como as descritas no enunciado) que têm esse perímetro.

Q24.

a)

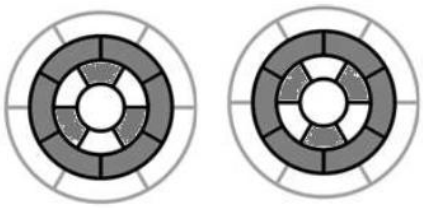


Pintura do primeiro anel feita por Joãozinho, fornecida pelo enunciado.

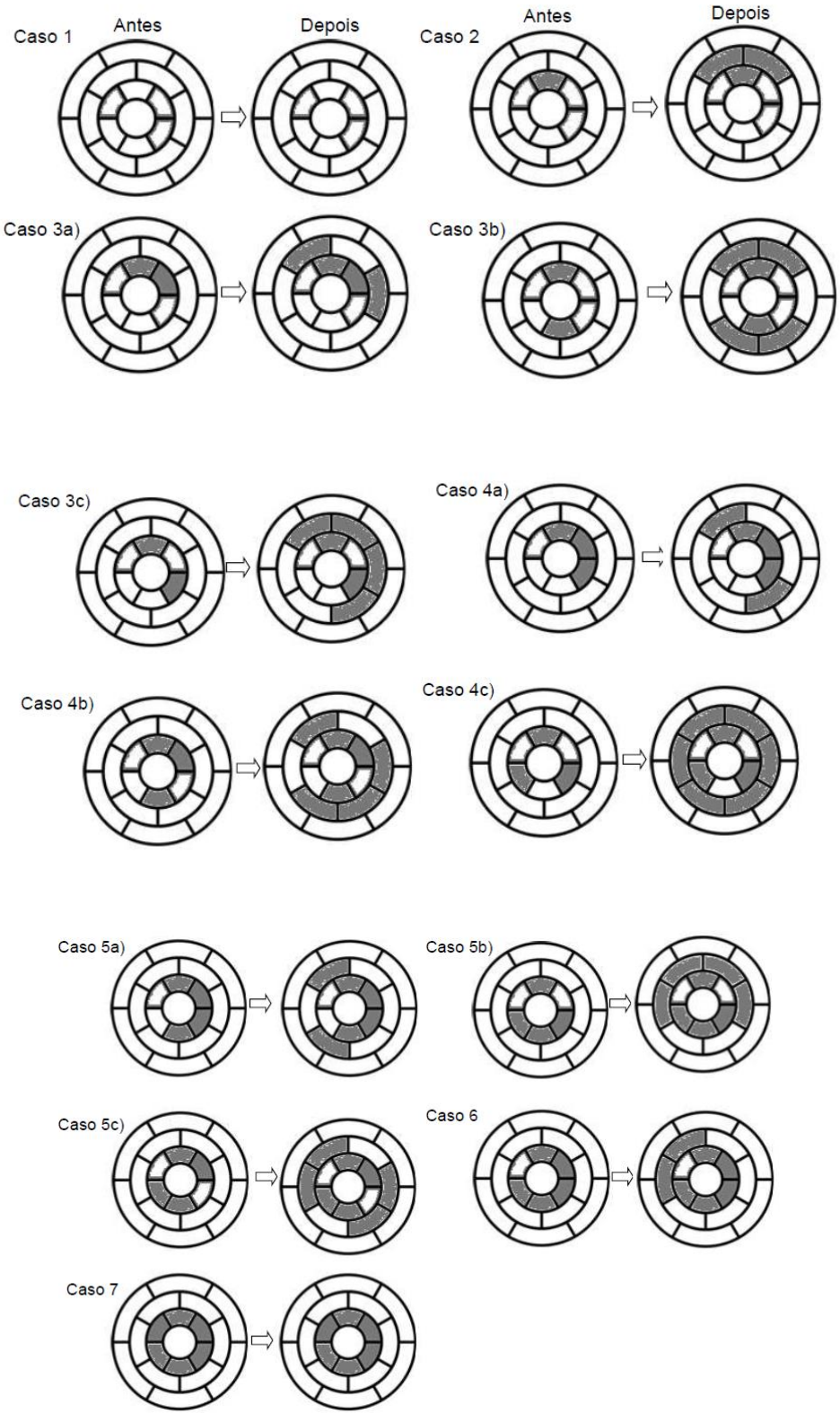
Pintura do segundo anel.

Resultado final da pintura dos três primeiros anéis.

b) Há duas soluções possíveis para que o segundo anel fique todo cinza; em ambas, as cores do primeiro anel devem se alternar.



c) Há $2^6 = 64$ possibilidades de Joãozinho pintar o primeiro anel. Entretanto, devido à simetria, podemos considerar, sem perda de generalidade, somente os 13 casos ilustrados a seguir. Observe o que acontece em cada caso quando pintamos o segundo anel de acordo com as regras do enunciado:

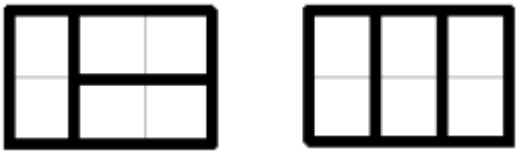


Em cada um desses casos, o segundo anel tem sempre uma quantidade par de partes pintadas de cinza. Para passar do segundo anel para o terceiro, o procedimento é análogo, exceto que os casos análogos a 2, 4a), 4b), 4c) e 6) não mais ocorrerão, pois não há no segundo anel uma quantidade ímpar de partes pintadas de cinza, e exatamente o mesmo que ocorreu da transição do primeiro para o segundo anéis ocorrerá também do segundo para o terceiro. Esse processo continua indefinidamente. Assim, a quantidade de partes pintadas de cinza de um anel, do segundo em diante, será sempre par.

d) Se um anel, a partir do terceiro, fosse pintado todo de cinza, o anel imediatamente anterior teria cores alternadas (três partes pintadas de cinza e três partes brancas, como ocorreu no item b). Como 3 é ímpar, isto é impossível, devido ao item c). Logo, a partir do terceiro, nenhum anel será pintado todo de cinza.

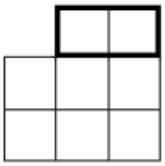
Q25.

a) As possibilidades restantes são dadas a seguir:
Note que não é possível ter as três peças retangulares na horizontal. Assim, ou temos duas na horizontal e uma na vertical (que pode estar à direita ou à esquerda) ou as três na vertical.

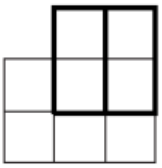


b) Comecemos por cobrir os quadradinhos superiores. Temos duas possibilidades:

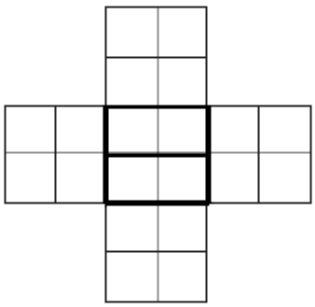
- Cobri-los com uma peça horizontal

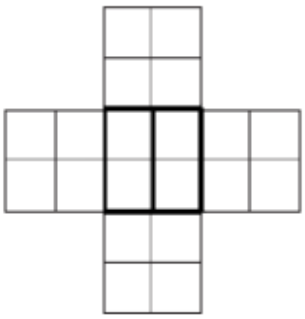


- Cobri-los com duas peças verticais



No primeiro caso, resta um quadriculado igual ao do item a) para ser coberto; como vimos, ele pode ser coberto de 3 modos. No segundo caso, só há uma forma possível de terminar a cobertura. Logo, o número de possibilidades é 3 + 1 = 4.





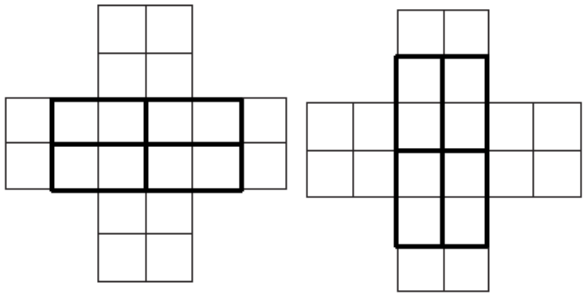
c) Comecemos cobrindo o quadrado 2 x 2 central. Há 3 possibilidades:

- O quadrado central é coberto de modo que as peças retangulares usadas não invadam as regiões vizinhas.

Isto ocorre quando são usadas duas peças horizontais ou duas verticais para cobrir o quadrado central (como ilustrado nas figuras ao lado).

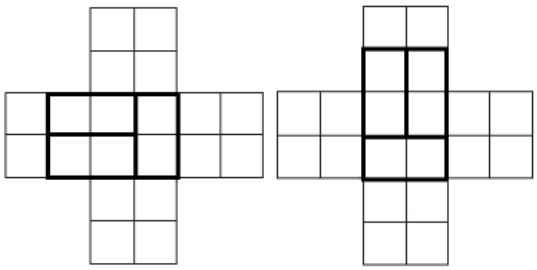
Em ambos os casos, cada um dos outros quadrados pode ser coberto de dois modos (com peças horizontais ou verticais).
Logo, o número de coberturas deste tipo é: 2 x 2 x 2 x 2 x 2 = 32.

- O quadrado central é coberto de modo a invadir dois quadrados opostos. Isto acontece quando são usadas quatro peças horizontais ou quatro verticais para cobrir suas casas (como ilustrado nas figuras ao lado).



Neste caso, os quadrados invadidos só podem ter sua cobertura completada de 1 modo, enquanto os outros dois podem ser cobertos de 2 modos. Logo, o número de coberturas deste tipo é: 2 x 1 x 1 x 2 x 2 = 8.

- O quadrado central é coberto de modo a invadir somente um dos outros dois quadrados. Isto ocorre quando são usadas 2 peças horizontais e 1 vertical ou duas verticais e uma horizontal (como ilustrado nas figuras ao lado).



Há quatro possibilidades para o quadrado a ser invadido. O quadrado invadido só pode ser coberto de 1 modo, e cada um dos demais, de 2 modos. Logo, o número de coberturas deste tipo é: 4 x 1 x 2 x 2 x 2 = 32.
O número total de possibilidades de cobertura é, portanto, igual a 32 + 8 + 32 = 72.

Q26.
a) Existem vários passeios da formiguinha nos quais ela obtém o número 45. Ela deve necessariamente visitar duas vezes a bolinha com o número 3 e uma vez a bolinha com o número 5, em uma ordem correta. Eis alguns exemplos:

- $3 \to 1 \to 3 \to 1 \to 5$
- $5 \to 1 \to 3 \to 1 \to 3$
- $1 \to 3 \to 1 \to 5 \to 1 \to 3$
- $1 \to 5 \to 1 \to 3 \to 1 \to 3$
- $3 \to 1 \to 5 \to 1 \to 3$
- $5 \to 1 \to 3 \to 1 \to 3 \to 1$
- $1 \to 3 \to 1 \to 5 \to 1 \to 3 \to 1$
- $1 \to 5 \to 1 \to 3 \to 1 \to 3 \to 1$

b) A fatoração do número 52 em produtos de números primos é $52=2\times2\times13$. A formiguinha nunca vai conseguir obter o número 52 em um passeio, pois, no objeto, não há uma bolinha com o número 13 para ela visitar.
c) A fatoração do número 40 em produtos de números primos é $40=2\times2\times2\times5$. Assim, para obter o número 40 em um passeio, a formiguinha deve passar somente pelas bolinhas 1, 2 e 5, passando exatamente três vezes pela bolinha 2 e uma vez pela bolinha 5. Como não há vareta ligando as bolinhas 1 e 2, para passar três vezes pela bolinha 2 a formiguinha é obrigada a passar pelo menos três vezes pela vareta que liga as bolinhas 2 e 5 e, ao fazer isso, ela passa pelo menos duas vezes pela bolinha 5. Assim, é impossível para a formiguinha fazer um passeio passando somente pelas bolinhas 1, 2 e 5, passando exatamente três vezes pela bolinha 2 e uma vez pela bolinha 5.

d) A fatoração do número 30 em produto de números primos é $30=2\times3\times5$. Para obter o número 30 no final de um passeio, a formiguinha deve passar somente pelas bolinhas 1, 2, 3 e 5, passando uma única vez pelas bolinhas 2, 3 e 5. A formiguinha não pode passar mais de duas vezes pela bolinha 1, pois, se isso acontecesse, ela passaria mais de uma vez pelas bolinhas 3 ou 5. Assim, temos as seguintes situações:

- obter 30 sem passar pela bolinha 1;
- obter 30 passando somente uma vez pela bolinha 1;
- obter 30 passando duas vezes pela bolinha 1;

Na primeira situação, a formiguinha tem duas possibilidades para iniciar seu passeio (bolinhas 3 ou 5) e, em cada uma delas, uma única direção a seguir. Temos, então, $2\times1=2$ possibilidades. São as seguintes:

- $3 \to 2 \to 5$
- $5 \to 2 \to 3$

Na segunda situação, a formiguinha tem quatro possibilidades para iniciar seu passeio (bolinhas 1, 2, 3 ou 5) e, em cada uma delas, duas direções a seguir. Temos, então, $4\times2=8$ possibilidades. São elas:

- $1 \to 3 \to 2 \to 5$
- $1 \to 5 \to 2 \to 3$
- $2 \to 3 \to 1 \to 5$
- $2 \to 5 \to 1 \to 3$
- $3 \to 1 \to 5 \to 2$
- $3 \to 2 \to 5 \to 1$
- $5 \to 1 \to 3 \to 2$
- $5 \to 2 \to 3 \to 1$

Na terceira situação, a formiguinha tem três possibilidades: iniciar e terminar na bolinha 1, iniciar na bolinha 1 e terminar na bolinha 2, ou iniciar na bolinha 2 e terminar na bolinha 1; em cada uma delas, ela tem duas direções a seguir. Temos, então, $3\times2=6$ possibilidades. São as seguintes:

- $1 \to 3 \to 2 \to 5 \to 1$
- $1 \to 5 \to 2 \to 3 \to 1$
- $1 \to 3 \to 1 \to 5 \to 2$
- $1 \to 5 \to 1 \to 3 \to 2$
- $2 \to 3 \to 1 \to 5 \to 1$
- $2 \to 5 \to 1 \to 3 \to 1$

No total, temos $2+8+6=16$ passeios diferentes em que a formiguinha obtém, ao final, o número 30.